

clasele IX - XII

*C. Năstăsescu
M. Brandiburu*

*C. Niță
D. Joița*

Culegere de probleme pentru liceu

Malgebră *matematică*

EDITURA ROTTECH PRO

Prof. Univ. Dr. C. Năstăsescu
(membru corespondent al Academiei Române)

Prof. Univ. Dr. C. Niță

Prof. M. Brandiburu

Prof. D. Joița

ALGEBRĂ

CULEGERE DE PROBLEME

PENTRU LICEU

clasele IX - XII



EDITURA ROTECH PRO

- 1997 -

NOTĂ

Prezenta lucrare este o versiune îmbunătățită a culegerii de probleme „Exerciții și probleme de algebră, clasele IX - XII“ de aceeași autori, tipărită pentru prima oară în 1981.

Culegerea a constituit lucrarea de bază pentru algebra de liceu, bucurându-se de un deosebit succes în rândul profesorilor și elevilor.

ISBN 973-97010-6-x

Tehnoredactare computerizată și copertă: **ROTECH PRO**

Tel. (01) 642.85.54

Tel./Fax (01) 250.68.07

CUPRINS

Partea I Enunțuri

	<u>Pag.</u>
Cap. I. Elemente de logică matematică	5
Cap. II. Mulțimi	6
Cap. III. Funcții	10
Cap. IV. Numere reale (structura algebrică și de ordine a mulțimii numerelor reale)	14
Cap. V. Funcția de gradul al doilea. Inecuații. Sisteme de ecuații ...	27
Cap. VI. Puteri și radicali	45
Cap. VII. Numere complexe	61
Cap. VIII. Funcția exponențială și funcția logaritmică	66
Cap. IX. Inducția matematică	75
Cap. X. Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton	80
Cap. XI. Progresii aritmetice și progresii geometrice	88
Cap. XII. Noțiuni de aritmetica numerelor întregi	96
Cap. XIII. Polinoame cu coeficienți complecși. Ecuații algebrice ..	101
Cap. XIV. Permutări	112
Cap. XV. Matrice	115
Cap. XVI. Determinanți	119
Cap. XVII. Rangul unei matrice. Matrice inversabile	125
Cap. XVIII. Sisteme de ecuații liniare	130
Cap. XIX. Legi de compoziție. Grupuri	134
Cap. XX. Inele și corpuri	145
Cap. XXI. Probleme pentru concursuri de matematică	153

Partea a II-a Indicații. Soluții. Răspunsuri

Cap. I. Elemente de logică matematică	161
Cap. II. Mulțimi	161
Cap. III. Funcții	163
Cap. IV. Numere reale (structura algebrică și de ordine a mulțimii numerelor reale)	166
Cap. V. Funcția de gradul al doilea. Inecuații. Sisteme de ecuații ..	179

Cap. VI. Puteri și radicali	195
Cap. VII. Numere complexe	204
Cap. VIII. Funcția exponențială și funcția logaritmică	208
Cap. IX. Inducția matematică	214
Cap. X. Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton	221
Cap. XI. Progresii aritmetice și progresii geometrice	226
Cap. XII. Noțiuni de aritmetica numerelor întregi	233
Cap. XIII. Polinoame cu coeficienți complecși. Ecuații algebrice ..	238
Cap. XIV. Permutări	249
Cap. XV. Matrice	251
Cap. XVI. Determinanți	254
Cap. XVII. Rangul unei matrice. Matrice inversabile	257
Cap. XVIII. Sisteme de ecuații liniare	260
Cap. XIX. Legi de compoziție. Grupuri	264
Cap. XX. Inele și corpuri	271
Cap. XXI. Probleme pentru concursuri de matematică	279
<i>Bibliografie</i>	287

Partea I

ENUNȚURI

Capitolul I

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $2 + 3 = 5$; b) $2 \cdot 3 < 6$; c) $4 \cdot 4 = 16$; d) $4 + 3 < 1 + 5$; e) $4 \cdot 5 - 6 = 2 \cdot 7$;
f) $4 - 2(5 - 3) = 1$; g) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < 1$.

2. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) există un număr întreg x , astfel încât $x^2 - 2x - 3 = 0$;
b) există un număr real x , astfel încât $|x - 1| + |x - 2| = 0$;
c) există un număr real x , astfel încât $x^2 - x + 1 = 0$;
d) există un număr real x , astfel încât $|x - 1| + |x^2 - 3x + 2| = 0$;
e) există un număr real x , astfel încât $|x - 1| - |x - 2| < 0$;
f) oricare ar fi numărul real x , avem $x^2 + (x - 1)^2 > 0$;
g) oricare ar fi numărul real x , avem $(x + 1)^2 + |x^2 - 2x + 3| > 0$;
h) oricare ar fi numărul real x , avem $|x - 1| + |x - 3| \neq 0$;
i) oricare ar fi numerele reale x și y , avem $x^2 + y^2 + 1 > 0$;
j) oricare ar fi numerele reale x și y , avem $x^2 + y^2 > 0$;
k) există numerele reale x și y astfel încât $|x - 1| + y^2 + y + 1 = 0$;

3. Folosind tabele de adevăr, să se verifice:

- a) $p \vee q \equiv q \vee p$; b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$; c) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$;
d) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$; e) $p \rightarrow \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$; f) $\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$;
g) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$; h) $p \vee p \equiv p$; i) $p \wedge p \equiv p$; j) $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$;
k) $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$; l) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
m) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

4. Să se arate că următoarele formule sunt tautologii (sau identic adevărate):

- a) $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; b) $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$; c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;
d) $(\neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow p$; e) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$; f) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow q$; g) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$; h) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$;
i) $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$.

5. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $(\exists x) (x^2 - 5x + 6 = 0)$ unde x desemnează un număr întreg;
b) $(\exists x) (2x^2 - x - 3 = 0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;

- c) $(\exists x) (|x - 6| + |x + 1| = 0)$ unde x desemnează un număr real;
- d) $(\exists x) (2x - 6 < 0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;
- e) $(\forall x) (3x - 1 < 0)$ unde x desemnează un număr real pozitiv;
- f) $(\forall x) (|x - 2| + |x + 3| > 0)$ unde x desemnează un număr real;
- g) $(\forall x) (|x - 2| + |2x^2 - 3x + 2| > 0)$ unde x desemnează un număr real;
- h) $(\forall x) (\forall y) (x^2 + y^2 - y + 1 > 0)$ unde x și y desemnează numere reale;
- i) $(\exists x) (\exists y) (x^2 + xy + y^2 + 1 = 0)$ unde x și y desemnează numere reale;
6. Fie predicatul $p(x, y)$: „ $x - y = 3$ “, unde x și y desemnează numere reale. Să se arate că propoziția
- $$(\forall y) (\exists x) p(x, y) \rightarrow (\exists x) (\forall y) p(x, y)$$
- este falsă.
7. Fie predicatul $p(x, y)$: „ $x + y \leq 1$ “, unde x și y desemnează numere reale. Să se arate că propoziția
- $$(\forall y) (\exists x) p(x, y) \rightarrow (\exists x) (\forall y) p(x, y)$$
- este falsă.
8. Fie predicatul $p(x, y)$: „ $x \leq y$ “, unde x, y desemnează numere întregi.
- a) Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile: $p(1, 5)$; $p(3, -1)$; $p(3, 4)$; $p(3, 1)$; $p(45, 11)$; $p(-2, -10)$.
- b) Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor:
- $$(\forall x) (\forall y) p(x, y), (\forall x) (\exists y) p(x, y), (\forall y) (\exists x) p(x, y), (\exists x) (\exists y) p(x, y).$$
9. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:
- a) $(\forall x) [(x > 0) \rightarrow (x^2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;
- b) $(\forall x) (\forall y) [(x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$, unde x, y sunt numere reale;
- c) $(\forall x) [(x < -2) \rightarrow (|x - 1| - 2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;
- d) $(\forall x) (\forall y) [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$, unde x, y desemnează numere reale pozitive;
- e) $(\forall x) (\forall y) [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$, unde x și y desemnează numere reale oarecare.

Capitolul II MULTIMI

1. Să se determine mulțimile:

- a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 6x - 7 = 0\}$; b) $\{x \in \mathbf{N} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$;
- c) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$; d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x^2 + 2x - 1 = 0\}$;
- e) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$; f) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0\}$;
- g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + 1 = 0\}$; h) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| - |x - 3| = 1\}$;
- i) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x^2 - 4| - 2x + 1 = 0\}$; j) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2|x| + 3 = 0\}$;

- k) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\}$; l) $\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0\}$;
 m) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^3 - 5x + 1 = 0\}$; n) $\{x \in \mathbf{Q} \mid |x - 1| + |x - 2| = 3\}$;
 p) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + |x + 2| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$;
 q) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| - |x - 4| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| - |x - 3| = 1\}$.

2. Să se determine mulțimile A și B astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,
 b) $A \cap B = \{7, 8, 9, 10\}$, c) $B - A = \{4, 5, 6, 11\}$.

3. Să se determine mulțimea E în următoarele cazuri:

- a) $\{1, 2, 3, 4\} \subset E$, $\{3, 4, 5, 6\} \subset E$, $E \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 și $\{7, 8\} \cap E = \emptyset$;
 b) $E \subset \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $E \subset \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{3, 4\} \subset E$ și $7 \notin E$.

4. Să se determine mulțimile A și B astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{3, 4\}$;
 c) $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$; d) $\{1, 2\} \cap B = \emptyset$.

5. Să se determine mulțimile A și B astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $B - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$;
 c) $\{3, 9\} \cap B = \emptyset$, d) $A \cap B = \{1\}$.

6. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine submulțimile B ale lui A astfel încât $B \cap \{1, 2, 3\} \neq \emptyset$.

7. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Să se determine mulțimea formată din toate submulțimile lui A care au proprietatea că nu conțin elementele a și c .

8. Fie mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se determine mulțimea submulțimilor lui X care au cel mult două elemente.

9. Să se determine mulțimea E și submulțimile A și B ale lui E , știind că:

- a) $E - A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; b) $E - B = \{5, 6, 11, 12\}$; c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.

10. Fie mulțimile $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7, 8, 9\}$. Să se determine mulțimea X astfel încât să aibă loc relația $(A - X) \cup (X - B) = \{1, 3\}$, X să aibă patru elemente și $\{3, 9\} \subset X$.

11. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se determine mulțimea X astfel încât să aibă loc relația $A - X = \{1, 2, 3\}$, $X \subseteq B$ și X să aibă 3 elemente.

12. Să se determine mulțimile A și B astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \cap B \supset \{1, 2\}$; c) $3 \notin B$; d) Numărul de elemente ale lui A să fie mai mic decât numărul elementelor lui B .

13. Să se arate că dacă A și B sunt două mulțimi, atunci:

a) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$; b) $A = B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ și $B - A = \emptyset$.

14. Fie A și B două submulțimi ale lui E . Dacă notăm $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, să se arate că:

$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap C_E B \cap C_E C) \cup (C_E A \cap B \cap C_E C) \cup (C_E A \cap C_E B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$, oricare ar fi submulțimile A, B, C ale lui E .

15. Fie E o mulțime care conține două elemente. Să se determine soluțiile (X, Y) ale ecuației $X \cup Y = E$.

16. Fie E o mulțime care conține două elemente. Să se determine soluțiile (X, Y) ale ecuației $X \cap Y = \emptyset$, (X, Y sunt submulțimi ale lui E).

17. Să se determine mulțimile:

$$\text{a) } A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = \frac{6n-7}{2n+1}, n \in \mathbf{Z}\};$$

$$\text{b) } B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = \frac{3n^2-2n+1}{n^2-1}, n \in \mathbf{N}\}.$$

18. Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = \frac{6n^2+7}{3n+1}, n \in \mathbf{Z}\}$.

19. Să se determine mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in \mathbf{R} \text{ astfel încât } x = \frac{a^2 - a + 1}{a + 1}\}.$$

20. Să se determine mulțimea

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid \exists n \in \mathbf{N}, x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1}\}.$$

21. Să se determine mulțimea $\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x^2-3x+2}{2x+1} \in \mathbf{Z}\}$.

22. Să se determine mulțimea

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 2 \text{ și } |x| - 2|y| = -1\}.$$

23. Să se determine mulțimea

$$A = \{(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid ab = 2160 \text{ și c.m.m.d.c. } (a, b) = 12\}.$$

24. Să se determine mulțimea $\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 9y^2 - (x+1)^2 = 32\}$

25. Să se determine mulțimea $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x+1| - |x-2| < 3\}$.

26. Să se determine mulțimea $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^2 - 2xy + 3y^2 = 8\}$.

27. Să se arate că mulțimea

$$\{(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x^2 - abx + a + b = 0\} \text{ are rădăcini întregi.}$$

28. Să se determine numărul de elemente din mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x + 3y = 1980\}.$$

29. Să se determine numărul de elemente din mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 4x + 3y = 1980\}.$$

30. Să se determine mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1976}\}.$$

31. Să se determine mulțimile A și B și numerele m, n, p știind că:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\}, B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + nx + p = 0\},$$

$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}.$$

32. Să se determine valorile reale ale lui a , astfel încât mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x - \frac{a}{2} = 2|2|x| - a^2|\}$$

să aibă trei elemente. Să se găsească elementele mulțimii.

33. Fie $m \in \mathbf{R}$. Considerăm mulțimea

$$A_m = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in \mathbf{R} \text{ astfel încât } x = \frac{a^2 + a + m}{a + 1}\}. \text{ Să se arate că:}$$

$$\text{a) } A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}; \quad \text{b) } A_m = \mathbf{R}, (\forall) m < 0;$$

c) Mulțimile A_m , când m parcurge mulțimea \mathbf{R} , nu au nici un element comun.

34. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$, numere impare. Să se arate că:

$$\{x \in \mathbf{Q} \mid ax^2 + bx + c = 0\} = \emptyset.$$

35. Fie mulțimile $A = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N}, x = 3n + 1\},$

$$B = \{x \mid \exists m \in \mathbf{N}, x = 7m - 1\}.$$

Să se arate că $A \cap B = \{x \mid \exists t \in \mathbf{N}, x = 21t + 13\}.$

36. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, are loc egalitatea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + m^2 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + 1 = 0\} = \emptyset.$$

37. Fie a, b două numere reale. Să se arate că, dacă $a + b + 1 = 0,$

$a \neq b, a, b \neq 1$ sau $b = \frac{a^2}{4}$ și $a > 4$, mulțimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + b = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + bx + a = 0\}$$

are trei elemente.

38. Să se arate că mulțimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 8x + 2m^2 = 0\}$ are exact două elemente, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}.$

39. Să se arate că mulțimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 + 8x + m^2 = 0\}$$

are unul sau două elemente. Să se determine m pentru care A are un singur element.

40. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + m - 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m + 1)x + m = 0\}.$$

41. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulțimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2(m + 1)x + m = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2mx + m - 1 = 0\}$ are exact patru elemente.

42. Să se determine numărul real m , astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m - 1)x + m + 2 = 0\} \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset.$$

43. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + m = 0\} \cap [0, +\infty). \text{ Discuție.}$$

44. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + m = 0\}. \text{ Discuție.}$$

45. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0]. \text{ Discuție.}$$

46. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + 2(m + 1)x + m - 2 = 0\} \cap [0, +\infty). \text{ Discuție.}$$

47. Să se determine a și b astfel încât să avem:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\} = \emptyset.$$

48. Fie A și B două submulțimi ale lui E . Folosind problema 14, să se determine submulțimea X a lui E , astfel încât să avem egalitatea

$$(A - X) \cup (X - A) = B.$$

49. Să se arate că nu există un număr finit de numere raționale q_1, q_2, \dots, q_n astfel încât oricare $x \in \mathbf{Q}$ să se poată scrie sub forma

$$x = r_1 q_1 + r_2 q_2 + \dots + r_n q_n,$$

unde $r_i \in \mathbf{Z}$.

Capitolul III FUNCTII

1. Fie $A = \{0, 1\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcțiile de la mulțimea A în mulțimea B . Să se precizeze câte din acestea sunt injective.

2. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcțiile $f: A \rightarrow B$ astfel încât $f(1) = c$.

3. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{5, 7, 9\}$. Să se determine toate funcțiile $f: A \rightarrow B$ astfel încât $f(1) \neq 5$ și $f(2) \neq 9$.

4. Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât:

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 4x - 1 \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

5. Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ având proprietatea:

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy, (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

6. Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât

$$f(1) \neq 0 \text{ și } f(x) \cdot f(y) = f(x + y - xy), (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

7. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care să verifice relația: $f(x) + f(n - x) = x, (\forall) x \in \mathbf{R}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

8. Există funcții $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) - f(-x) = x^2, (\forall) x \in \mathbf{R}$?

9. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ satisfăcând condiția:

$$mf(x - 1) + nf(-x) = 2|x| + 1.$$

Să se determine m și n astfel încât funcția f să îndeplinească condițiile $f(-2) = 5$ și $f(1) = 1$.

10. Există funcții $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care satisfac proprietatea:

$$f(x - 1) - f(1 - x) = x, (\forall) x \in \mathbf{R}?$$

11. Să se determine funcția f care verifică relația:

$$4f(x) + 3f(-x) = c|x|, c \in \mathbf{R}.$$

Să se traseze graficul funcției astfel determinate.

12. Să se determine funcțiile f de gradul întâi, astfel încât $f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.

13. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b$. Să se determine

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}$$

14. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \max(2x - 1, x + 1),$

b) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \min(3x - 1, x + 3).$

15. Fie funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| + 2$ și $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = |x - 2| + 1$. Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

16. Fie funcțiile $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(n) = 2n$ și $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N},$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}. \text{ Să se determine } f \circ g \text{ și } g \circ f.$$

17. Fie funcțiile:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{dacă } x \leq -1 \\ -2, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}.$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \begin{cases} -3, & \text{dacă } x \leq -2 \\ x - 1, & \text{dacă } x > -2 \end{cases}$$

Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

✓ 18. Fie funcțiile:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2+3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x + 1.$$

Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

19. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x+1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze f^{-1} .

20. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 2, \\ 3x-2, & \text{dacă } x < 2. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze inversa sa.

21. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{dacă } x \leq 4, \\ 2x-7, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$ Să se arate

că f este inversabilă și să se calculeze f^{-1} .

22. Să se arate că următoarele funcții nu sunt injective:

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$; b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^5 - 7x^4 + 1$;

c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$; d) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^{1981} - 4x^{1979} + 1$.

23. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definită prin egalitatea:

$f(x) = x + \frac{1}{x}$. Să se arate că pe intervalul $(0, 1]$, f este strict descrescătoare iar pe intervalul $[1, +\infty)$ este strict crescătoare.

24. Fie funcțiile f și g , definite pe \mathbf{R} cu valori în \mathbf{R} , unde

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4 \text{ și } g(x) = x^3 + x + 2.$$

Să se arate că f nu este injectivă, iar g este injectivă.

25. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de forma:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2] \\ mx-3, & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se determine m astfel încât graficul funcției să treacă prin punctul $A(3, 3)$.

b) Să se cerceteze dacă funcția f este injectivă.

26. Pentru orice $m, n \in \mathbf{R}$ se consideră funcția

$$f_{m,n} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_{m,n}(x) = \begin{cases} x - m, & \text{pentru } x \leq 0, \\ nx + m, & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui m și n pentru care $f_{m,n}$ este:

a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.

27. Fie a un număr natural. Definim funcția: $f_a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ astfel încât $f_a(n)$ este ultima cifră a numărului a^n .

a) Să se arate că $\exists b, 0 \leq b \leq 9$ astfel încât $f_a = f_b$.

b) Să se arate că oricare ar fi a , f_a este o funcție periodică (adică există un număr natural n_0 astfel încât $f_a(n + n_0) = f_a(n)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și $n \neq 0$).

28. Fie A o mulțime care are cel puțin trei elemente. Notăm cu $S_A = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ bijectiv}\}$. Dacă $f \in S_A$ și $f \circ g = g \circ f$, $(\forall) g \in S_A$, atunci $f = 1_A$.

29. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție oarecare. Dacă $A' \subset A$ este o submulțime a lui A , mulțimea $f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$ care este o submulțime a lui B se numește *imaginea submulțimii A' prin funcția f* . Dacă $A' = A$, atunci mulțimea $f(A)$ se numește *imaginea funcției f* și se notează $\text{Im } f$.

a) Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

Să se determine: $f([-1, 1])$; $f([-2, 0])$; $f((-2, 1])$; $f((1, 2))$.

b) Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 2| + 1$.

Să se determine: $f([1, 3])$; $f([-1, 3])$; $f([1, +\infty))$.

c) Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 2| - 1$.

Să se determine: $f([0, 1])$; $f([-2, 1])$; $f([-3, 2])$.

30. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Să se arate că:

a) Dacă X și Y sunt două submulțimi ale lui A , atunci:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y) \text{ și } f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y).$$

b) f este injectivă dacă și numai dacă $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, oricare ar fi submulțimile X și Y ale lui A .

31. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Leftrightarrow f(CA') \subset Cf(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$;

b) f este surjectivă $\Leftrightarrow f(CA') \supset Cf(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$;

c) f este bijectivă $\Leftrightarrow f(CA') = Cf(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$.

($\mathcal{P}(A)$ este mulțimea părților lui A).

32. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Fie $\mathcal{P}(A)$ și $\mathcal{P}(B)$ mulțimea părților lui A și respectiv ale lui B . Definim funcția $f_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, $f_*(A') = f(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Leftrightarrow f_*$ este injectivă;

b) f este surjectivă $\Leftrightarrow f_*$ este surjectivă;

c) f este bijectivă $\Leftrightarrow f_*$ este bijectivă.

33. Fie funcția *semn*, $\text{sgn} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (2x - 1) \text{sgn } x$;

b) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| \text{sgn } x$;

c) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \text{sgn}(x - 1) + x \text{sgn}(x - 2)$.

34. Să se reprezinte grafic funcția $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}, a > 0$,

$$f(x) = \min_{-a \leq t \leq x} t^2.$$

35. Să se construiască o funcție $h : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ care să fie surjectivă și astfel încât $h(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

36. Să se demonstreze că oricare ar fi două funcții bijective:

$f, g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, funcția $h : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, h(x) = f(x) \cdot g(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$ nu este bijectivă.

37. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ și funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel încât $f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4$. Să se arate că a este negativ.

38. Fie A o mulțime finită având n elemente, $a \in A$, iar f_1, f_2, \dots, f_n funcții bijective de la A la A . Să se arate că există $k \leq l$ astfel încât

$$(f_k \circ f_{k+1} \circ \dots \circ f_l)(a) = a.$$

Capitolul IV NUMERE REALE

(Structura algebrică și de ordine a mulțimii numerelor reale)

Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât oricare două sunt diferite între ele, să se demonstreze egalitățile:

$$1. \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

$$2. \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

$$3. \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

$$4. \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab.$$

$$5. \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}.$$

$$6. \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{bc + ca + ab}{a^2 b^2 c^2}.$$

Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze egalitățile:

$$7. \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$+ \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0; a, b, c, d \text{ fiind diferite}$$

între ele.

$$8. \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)} =$$

$$= \frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}.$$

Generalizare.

9. Fie a, b, c numere reale nenule, astfel încât oricare două sunt diferite între ele. Să se arate că produsul

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \text{ este egal cu:}$$

I) 9, dacă $a + b + c = 0$;

II) 1, dacă $|c| = |a - b|$.

10. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(b + c)(c + a)(a + b).$$

Să se deducă de aici că, dacă

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3,$$

atunci $(a + b + c)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. I) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 \right];$$

II) Dacă $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, atunci $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

12. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că:

I) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;

II) $(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$;

III) $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca$.

13. Să se demonstreze că, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$, atunci

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

14. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

15. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a + b = 2$. Să se demonstreze că

$$a^4 + b^4 \geq 2.$$

16. Să se demonstreze că din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi dacă și numai dacă

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4).$$

17. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

atunci pentru n , număr natural, avem

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}.$$

18. I) Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă m și n sunt numere naturale de aceeași paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2};$$

II) Să se deducă, de aici, că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

19. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$a + b + c \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

20. Fie a, b, c, d numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

21. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $|a| \leq 1, |b| \leq 1$, să se arate că

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

22. Să se demonstreze că

I) $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$;

II) $ab + ac + ad + bc + bd + cd \leq \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, unde $a, b,$

$c, d \in \mathbf{R}$;

III) *Generalizare.* $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \leq \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$.

23. Fie numerele raționale $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$, unde $b_i > 0$, pentru

$i = 1, 2, \dots, n$. Să se demonstreze că

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i}.$$

24. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se arate că

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

25. I) Dacă a, b, t sunt numere reale pozitive astfel încât $a > b > t$, atunci $(a+t)(b-t) < ab$.

II) Să se arate că produsul a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este maxim dacă toți factorii sunt egali.

26. I) Dacă a, b sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

II) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

III) *Generalizare.* Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive.

Să se arate că

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

(media geometrică a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu media aritmetică a lor).

În ce condiții are loc egalitatea?

27. Să se arate că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, a', b', c' , are loc inegalitatea:

$$\sqrt[3]{(a+a')(b+b')(c+c')} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'}.$$

28. Fie n un număr natural. Atunci.

I) $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)$; II) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$.

29. Să se arate că suma a n numere reale pozitive, al căror produs este constant, este minimă în cazul în care numerele sunt egale între ele.

30. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

31. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \dots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq 3^n.$$

32. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se arate că

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \left(\frac{a_2^2}{a_3^2} + \frac{a_2}{a_3} + 1 \right) \dots \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 \right) \left(\frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1 \right) \geq 3^n.$$

33. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

(media armonică a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu media geometrică a lor).

În ce condiții are loc egalitatea? (vezi ex. 26).

34. Fie k_1, k_2, \dots, k_n numere naturale și a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se demonstreze că produsul $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$, unde $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ este constantă, este maxim atunci când numerele a_1, a_2, \dots, a_n sunt proporționale, respectiv, cu k_1, k_2, \dots, k_n .

35. Să se demonstreze că suma pătratelor a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este minimă în cazul în care numerele sunt egale.

36. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}.$$

37. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Mai mult, egalitatea are loc numai în cazul în care numerele a_1, a_2, \dots, a_n sunt proporționale, respectiv, cu b_1, b_2, \dots, b_n (inegalitatea Cauchy-Buniakovski).

38. Să se demonstreze că:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2,$$

unde a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere reale pozitive.

39. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

40. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale pozitive. Să se arate că $\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$. (inegalitatea lui Minkovski).

41. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

42. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

43. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \right| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|.$$

44. I) Dacă $a, a', b, b' \in \mathbf{R}$, atunci

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) - (ab + a'b')^2 = (ab' - a'b)^2;$$

II) Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$; atunci

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

45. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

$$\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2},$$

unde $\max(a, b)$, respectiv $\min(a, b)$, reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a și b .

46. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2(\max(a, b, c) - \min(a, b, c)).$$

unde $\max(a, b, c)$, respectiv $\min(a, b, c)$, reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a, b, c .

47. Fie $x \in \mathbf{R}$ și se notează $x_+ = \frac{x+|x|}{2}$ și $x_- = \frac{-x+|x|}{2}$. Să se arate

că $x = x_+ - x_-$ și $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficul funcțiilor:

$f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = x_+$ și $g(x) = x_-$.

48. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că ecuația $3x^2 + 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$ are rădăcini reale dacă și numai dacă $a = b = c$.

49. Fie a și b numere reale pozitive. Să se scrie în ordine crescătoare numerele

$$a, b, \frac{a+b}{2}, \sqrt{a^2 + b^2}.$$

50. Să se rezolve în mulțimea \mathbf{R} ecuațiile:

I) $|3x+2| = 5$; II) $|x+1| = |x-2|$; III) $|x-1| + |x| + |x+1| = x+2$; IV) $||x|-2| = 10$; V) $||x| - |x+1|| = |x+2|$; VI) $|x+1| - |x| + |x-1| - 2|x-2| = x+2$.

51. Să se rezolve în mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale inecuațiile:

I) $|x-2| \leq 1$; II) $|x+2| > 1$; III) $|x-1| + |x| \leq 2$; IV) $|x+1| + |x| > 2$; V) $|x-1| + |x-2| \leq 0$; VI) $|x+1| + |x-2| > 0$; VII) $|x-1| + |x+1| \leq x+3$; VIII) $|x+1| + |x-2| > x+1$; IX) $|x+1| \leq |x-1|$; X) $|x+2| > |x-1|$.

52. Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită numerele:

a) -5 ; b) $\frac{17}{6}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) 0 ; e) $\frac{27}{11}$; f) $-\frac{523}{21}$; g) $-\frac{201}{19}$.

53. Pentru fracțiile zecimale periodice următoare să se determine numărul rațional pe care-l reprezintă și să se verifice apoi, prin algoritmul de împărțire, că se obține fracția zecimală inițială:

a) $3,(6)$; b) $1,\overline{72}(32)$; c) $-3,(12)$; d) $0,01(25)$; e) $-4,3(042)$; f) $-0,001(3)$; g) $0,01(02)$.

54. Să se arate care dintre numerele următoare sunt raționale și care iraționale:

a) $-1,56$; b) $1,(\overline{560})$; c) $-2,53(\overline{9})$; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{6}$; g) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; h) $\sqrt[3]{2}$;
 i) $\sqrt[3]{3}$; j) $\sqrt[3]{6}$; k) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

55. Fie $1 \leq a \leq 9$. Să se arate că fracția

$$0,a0a00a000a0000a\dots$$

(după primul a urmează un 0, după al doilea sunt doi de 0 etc.) reprezintă un număr irațional.

56. Să se arate că fracția zecimală infinită $0,123456789101112\dots$, în care după virgulă sunt scrise, consecutiv, toate numerele naturale nenule în ordine crescătoare, reprezintă un număr irațional.

57. Să se arate că în reprezentarea zecimală a oricărui număr irațional există cel puțin o cifră care se repetă de o infinitate de ori.

58. Să se dea exemple de numere iraționale pentru care numai două cifre, respectiv numai trei cifre, se repetă de o infinitate de ori.

59. Să se dea un exemplu de un număr rațional a și de un număr irațional b , astfel încât

$$\left| \sqrt{3} - a \right| < \frac{1}{1000} \text{ și } \left| \sqrt{3} - b \right| < \frac{1}{1000}.$$

60. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$. Să se arate că există între a și b cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

61. Să se arate că pentru orice număr rațional pozitiv a , astfel încât $a^2 < 2$ (respectiv $a^2 > 2$), există un număr rațional pozitiv b , astfel încât $a^2 < b^2 < 2$ (respectiv $a^2 > b^2 > 2$).

62. Să se arate că numerele $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sunt iraționale.

63. Fie m și n numere naturale. Să se găsească condiții în care numerele $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ și $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ sunt iraționale. Dar dacă m și n sunt numere raționale pozitive?

64. Să se arate că, dacă a este un număr irațional pozitiv, atunci \sqrt{a} este un număr irațional.

65. Să se demonstreze că:

I) Suma dintre un număr rațional și unul irațional este un număr irațional. Analog, pentru diferență.

II) Dacă a este irațional, atunci $\frac{1}{a}$ este irațional.

66. Fie a și b numere iraționale astfel încât $a + b$ este rațional. Să se demonstreze că numerele: $a - b$, $a + 2b$ sunt iraționale.

67. Fie $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. Atunci

I) $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ dacă și numai dacă $a = a'$ și $b = b'$;

II) $a + \sqrt{b} \neq a' - \sqrt{b'}$, pentru orice numere raționale a, b, a', b' iar \sqrt{b} să fie irațional.

68. Să se determine numerele naturale n astfel încât $\sqrt{n^2 + 1}$ să fie rațional.

69. Să se determine cele mai mici numere naturale n , pentru care este adevărată inegalitatea $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, dacă

I) $\varepsilon = 0,001725\dots$; II) $\varepsilon = 0,0003254\dots$.

70. Să se spună care dintre numerele, din perechile de numere următoare, este mai mare:

a) 5,34297... și 5,34298...; b) -6,2739... și -6,2736...; c) $\frac{7}{3}$ și 2,(42);

d) $-\frac{5}{7}$ și -0,7(32); e) -2,2 și -2,1(9); f) π și 3,14.

71. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decât 10^{-2} , prin lipsă și prin adaos, pentru numerele:

a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{2}{5}$; e) $\sqrt{11}$; f) $-\sqrt{11}$; g) $\frac{7}{13}$;

h) $-\frac{7}{13}$; i) $\frac{13}{11}$; j) $-\frac{13}{11}$.

72. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale sumei $x + y$, dacă

a) $x = 3,2745\dots$ și $y = 2,3478\dots$;

b) $x = 10,7373\dots$ și $y = -11,0354\dots$.

73. Să se găsească primele două cifre, după virgulă, ale produsului xy , dacă:

a) $x = 1,3426\dots$ și $y = 1,1243\dots$;

b) $x = 2,1357\dots$ și $y = 3,2153\dots$.

74. Să se găsească primele patru cifre, după virgulă, ale sumelor:

a) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$; c) $\frac{3}{4} + \sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3} + \sqrt{5}$; e) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$;

f) $\sqrt{3} - \frac{11}{9}$; g) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

75. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale produselor:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$; c) $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{7}$; d) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{5}$; e) $-\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$;

f) $-\frac{11}{9} \cdot \sqrt{5}$; g) $-0,710710071... \times \sqrt{6}$.

76. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} , prin lipsă și prin adaos, pentru numerele:

a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; c) $\frac{3 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$;

d) $\frac{3 - \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$.

77. a) Folosind teorema lui Pitagora, să se construiască cu rigla și compasul segmentele de lungime:

2; 3; 2,(6); 2,5; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{10}$.

b) Să se figureze, pe axa reală, punctele care au ca abscise opusele numerelor de la punctul a).

78. Să se determine numerele raționale $\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu 0,(272).

79. a) Fie $0 < \frac{a}{b} < 1$ un număr rațional, unde $a, b > 0$. Să se arate că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, avem

$$\left| \frac{a+n}{b+n} - 1 \right| < \left| \frac{a}{b} - 1 \right|.$$

b) Mai mult, să se arate că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, un număr real arbitrar, există n_0 astfel încât

$$\left| \frac{a+n_0}{b+n_0} - 1 \right| < \varepsilon.$$

80. Să se determine numerele întregi k , astfel încât rădăcinile ecuației $kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$ să fie raționale.

81. Să se demonstreze că, dacă $a, b, c, \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ sunt numere raționale, atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ sunt, de asemenea, numere raționale.

Generalizare.

82. Fie a un număr real și notăm cu $\{a\} = a - [a]$ partea fracționară a sa, iar $n \geq 2$ un număr natural. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(a) = \{a^n \sqrt{2}\}$ nu este injectivă.

83. Să se determine partea întreagă a numărului $3^{\sqrt{3}}$.

84. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x+3}{4} \right] = \frac{x-2}{3}$; b) $\left[\frac{x^2 - 3x + 1}{3} \right] = \frac{x-1}{3}$; c) $[2x - 3] = [x + 1]$.

85. a) Fie $\varepsilon \geq 0$ și a_1, a_2, \dots, a_n numere reale astfel încât $|a_1| \leq \varepsilon$, $|a_{i+1} - a_i| \leq \varepsilon$, pentru $i = 1, 2, \dots, n-1$. Să se arate că există un număr natural $k \leq n$, astfel încât

$$\left| a_k - \frac{1}{2} a_n \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

b) Să se deducă, de aici, că există un număr natural p , astfel încât

$$\left| \sum_{i=1}^p a_i - \sum_{i=p+1}^n a_i \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

86. Fie a, b numere raționale pozitive și $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Să se găsească, presupunând că există, numerele raționale x și y astfel încât

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

În ce condiții astfel de numere există?

Acceași problemă pentru egalitatea

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

87. Fie $a, b, c, m \in \mathbf{R}$ astfel încât $m > 0, ac < 0$ și

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Definim funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, prin $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Să se demonstreze că

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1) < 0.$$

88. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a \neq b$. Să se determine cea mai mică valoare a funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = |x - a| + |x - b|.$$

Generalizare.

89. Să se arate că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem

a) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$;

b) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$.

90. Să se arate că

$$\sqrt[3]{2} \notin \{p + q\sqrt{r} \mid p, q, r \in \mathbb{Q}\}.$$

91. Să se determine mulțimea

$$\{a \in \mathbb{Q} \mid \text{există } b \in \mathbb{Q} \text{ astfel încât } 5a^2 - 3a + 16 = b^2\}.$$

Generalizare.

92. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - [x] = 3,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x .

93. Fie $s = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{1000^2}$.

Să se arate că $|s - 0,105| < 0,006$.

94. Fie a un număr real care are o reprezentare zecimală de forma $0,999\dots$, unde după virgulă sunt 100 de 9 consecutivi. Să se arate că \sqrt{a} are o reprezentare zecimală în care după virgulă sunt, de asemenea, 100 de 9 consecutivi.

95. a) Fie $\alpha > \beta > 0$ numere reale. Să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \text{ și } \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$$

este mai mare.

b) *Generalizare.* Dacă n este un număr natural, să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-1}}{1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^n} \text{ și } \frac{1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{n-1}}{1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^n}$$

este mai mare.

96. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$, iar $p \in \mathbb{N}$ un număr prim. Să se arate că:

$$a + b\sqrt[p]{p} + c\sqrt[p]{p^2} = 0 \text{ dacă și numai dacă } a = b = c = 0.$$

97. Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a . Să se demonstreze că:

a) $[x] + [y] \leq [x + y]$;

b) $\left[\frac{[x]}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right]$; $n \neq 0$ fiind un număr întreg;

c) $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$;

d) $[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$.

98. Fie numărul $\frac{n^2 + 5}{2100}$, unde n este un număr par.

a) Să se arate că fracția zecimală sub care se reprezintă acest număr rațional este mixtă.

b) Să se găsească cea mai mică valoare a lui n pentru care acest număr se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite.

c) Dacă presupunem că n este astfel încât fracția $\frac{n^2 + 5}{2100}$ este ireductibilă, să se determine numărul cifrelor din perioadă și al celor care nu sunt în perioadă.

99. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n ($n \neq 0, -1, -2$), numărul $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. La fel, pentru $\frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n^2 - 1)}$ ($n \neq 0, \pm 1$).

100. a) Fie a un număr rațional, dat de fracția ireductibilă $\frac{m}{n}$, (m, n) = 1, care se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă. Să se arate că numărul k al cifrelor perioadei este cel mai mic număr natural astfel încât $10^k - 1$ să fie divizibil prin n .

b) Să se determine numitorii fracțiilor ireductibile care dau numere raționale ce se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă, a cărei perioadă să aibă 1, 2, 3 sau 4 cifre.

c) Dacă n și n' sunt numitorii fracțiilor ireductibile, care dau numere raționale, care se reprezintă sub formă de fracții zecimale periodice simple având perioadele formate din k , respectiv k' cifre, să se arate că orice fracție ireductibilă cu numitorul nn' dă un număr rațional care se reprezintă sub forma unei fracții periodice simple. Mai mult, dacă n și n' sunt prime între ele, numărul cifrelor din perioada fracției zecimale periodice care reprezintă numărul rațional dat de o fracție ireductibilă de numitor nn' este c.m.m.m.c. al numerelor k și k' .

101. Să se determine numerele raționale care se reprezintă sub formă de fracții zecimale mixte, având o cifră la partea neperiodică și două cifre în perioadă.

102. Fie $\frac{m}{7}$ și $\frac{m}{13}$ fracții ireductibile și p , respectiv p' , numerele date, de perioadele fracțiilor zecimale periodice sub care se reprezintă

numerele raționale $\frac{m}{7}$ și $\frac{m}{13}$. Să se arate că $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$.

103. Fie $\frac{m}{n}$ o fracție ireductibilă care dă un număr rațional ce se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple cu perioada formată din $n - 1$ cifre; fie aceasta $(a_1 a_2 \dots a_{n-1})$. Să se arate că orice altă fracție cu același numitor dă un număr rațional care se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă cu perioada de forma $(a_i a_{i+1} \dots a_{n-1}, a_1 a_2 \dots a_{i-1})$, pentru un anumit i , $1 \leq i \leq n - 1$.

104. a) Se dau numerele $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$, care au aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^p . Să se arate că numărul $\frac{mk + m'k'}{nk + n'k'}$, în care k și k' sunt numere întregi, are aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^p .

b) Cunoscând resturile r și r' ale împărțirii lui $10^p \cdot m$ prin n și respectiv $10^p \cdot m'$ prin n' , să se determine restul împărțirii lui $(mk + m'k') \cdot 10^p$ prin $nk + n'k'$.

Capitolul V

FUNCTIA DE GRADUL AL DOILEA

INECUAȚII. SISTEME DE ECUAȚII

1. Să se aducă la forma canonică următoarele funcții de gradul II:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$;

b) $f(x) = -x^2 + 7x + 2$;

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$;

d) $f(x) = 0,5x^2 - 0,2x + 0,3$;

e) $f(x) = -0,4x^2 + x + 0,1$;

f) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

2. Să se determine axa de simetrie și vârful parabolei asociat funcțiilor:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$;

b) $f(x) = x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 12$;

d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;

$$\text{e) } f(x) = 0,5x^2 - 0,1x + 0,4; \quad \text{f) } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}.$$

3. Să se stabilească maximul sau minimul următoarelor funcții:

$$\text{a) } f(x) = -x^2 + 2x - 1; \quad \text{b) } f(x) = 0,5x^2 + x + 1;$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x + 2; \quad \text{d) } f(x) = -2x^2 + 4x + 5;$$

$$\text{e) } f(x) = 5x^2 - 2x + 3; \quad \text{f) } f(x) = x^2 - 4.$$

4. Să se stabilească semnul următoarelor funcții:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 6x + 5; \quad \text{d) } f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4};$$

$$\text{b) } f(x) = -x^2 - 5x - 6; \quad \text{e) } f(x) = -0,2x^2 + x - 0,8;$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x + 13; \quad \text{f) } f(x) = 0,4x^2 - 5x.$$

5. Să se facă tabloul de variație și să se traseze graficul următoarelor funcții:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 6x + 8; \quad \text{b) } f(x) = -2x^2 + 7x - 5;$$

$$\text{c) } f(x) = -x^2 + 6x - 9; \quad \text{d) } f(x) = 2x^2 - 3x + 1;$$

$$\text{e) } f(x) = -x^2 + 25; \quad \text{f) } f(x) = -x^2 + 10x.$$

6. Să se traseze graficul funcțiilor:

$$\text{a) } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x^2 - 2x + 1|;$$

$$\text{b) } g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = |-x^2 + 2x + 1|;$$

$$\text{c) } h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = |x^2 - 5x| + 1;$$

$$\text{d) } k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, k(x) = |2x^2 - 3x| - 1;$$

$$\text{e) } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \in (-\infty, -2), \\ x^2, & x \in [-2, 2], \\ x + 2, & x \in (2, +\infty); \end{cases}$$

$$\text{f) } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x^2 - 9| + |x^2 - 16|;$$

$$\text{g) } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \min(x, x^2);$$

$$\text{h) } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \max(x, x^2);$$

$$\text{i) } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \min(1, x, x^2);$$

j) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \max(1, x, x^2);$

k) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \max(2x, x^2);$

l) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0; \\ x^2+1, & x > 0. \end{cases}$

7. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |ax^2 - 3x + c|$. Dacă $0 < a < 2$ și $c < 0$, să se determine a și c astfel încât $f(0) = 4$ și $f(1) = 6$.

8. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcții să treacă prin punctele: $A(1, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(2, 3)$.

9. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcții să treacă prin punctele: $A(-2, 20)$, $B(-1, 12)$ și să taie axa Ox în punctul de coordonate $C(2, 0)$.

10. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât să aibă vârful în punctul $V(4, -4)$ și să taie axa Oy în punctul $A(0, 12)$.

11. Să se determine valoarea lui x pentru care

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$

ia cea mai mică valoare, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$.

12. Să se arate că următoarele funcții sunt strict crescătoare:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2+1, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

13. Să se arate că următoarele funcții sunt strict descrescătoare:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{dacă } x \leq 0, \\ -x^2+1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{dacă } x \leq 2, \\ -x^2 + 4x - 2, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$

14. Să se arate că funcțiile de la problemele 12 și 13 sunt bijective și să se determine inversele lor.

15. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ știind că admite un maxim egal cu 9 și trece prin punctele $A(1, -7)$ și $B(-1, -27)$.

16. Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuațiilor următoare să existe relația scrisă în dreptul fiecăreia:

a) $(m+1)x^2 + 2mx + 5 = 0$, $x_1 - x_2 = 2$;

b) $(m-2)x^2 + (3m-5)x + 3 = 0$, $x_1 = x_2$;

c) $(m+3)x^2 + mx + m + 1 = 0$, $x_1 = 3x_2$;

d) $3x^2 + (m-3)x + m + 5 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3}$;

e) $(m+5)x^2 - (m+7)x - m + 3 = 0$, $x_1x_2 = x_1 + x_2$;

f) $mx^2 - (m-1)x - m + 1 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 = 4$;

g) $mx^2 + (m^2 - 2)x + 2(m+1) = 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$;

h) $(m+2)x^2 + (m-3)x + m = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{3}{2}$;

i) $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

j) $x^2 + 2(3m+2)x + 3(2m+1) = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{10m}{3}x_1x_2$;

k) $x^2 - (m+1)x + m = 0$, $|x_1 - x_2| = 1$.

17. Să se calculeze, în funcție de $m \in \mathbf{R}$, expresiile:

a) $x_1 + x_2$; b) x_1x_2 ; c) $x_1^2 + x_2^2$; d) $x_1 - x_2$; e) $x_1^3 + x_2^3$;

f) $x_1^4 + x_2^4$; g) $x_1^5 + x_2^5$; h) $x_1^{-1} + x_2^{-1}$; i) $x_1^{-2} + x_2^{-2}$;

j) $x_1^{-3} + x_2^{-3}$ cu $x_1, x_2 \neq 0$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - mx + m + 1 = 0$.

18. Să se calculeze, în funcție de m , expresiile:

a) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$; b) $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - m^2x + m^2 + 1 = 0$.

19. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini:

a) $x_1 = 7, x_2 = -7$; b) $x_1 = 0, x_2 = -5$; c) $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{3}{5}$.

d) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5}{7}$; e) $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}, x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$.

20. Se dă ecuația $2x^2 + (m+1)x + 5m - 2 = 0$. Să se formeze ecuația în y ale cărei rădăcini îndeplinesc condițiile:

a) $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}$; b) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$;

c) $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 x_2$; d) $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_2}$;

e) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_1}$; f) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$;

g) $y_1 = x_1^3, y_2 = x_2^3$; h) $y_1 = x_1^{-2}, y_2 = x_2^{-2}$;

i) $y_1 = x_1^{-3}, y_2 = x_2^{-3}$.

21. Să se rezolve inecuațiile:

a) $3x^2 + 5x + 3 > 1$; b) $-2x^2 + 6x - 3 < 5$; c) $6x^2 + 2x - 3 > 0$;

d) $5x^2 + 3x + 1 > 0$; e) $-8x^2 + 2x + 6 < 0$; f) $7x^2 + 3x - 4 < 0$;

g) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 3x + 4} > 3$; h) $\frac{5x + 7}{x - 2} - \frac{2x + 21}{x + 7} > \frac{2}{3}$;

i) $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| < 47$; j) $\left| \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1} \right| > 2$;

k) $\frac{|x^2 + 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} > 1$; l) $\frac{2x + 1}{2x^2 + 3x - 2} < 2$; m) $\left| \frac{3x - 1}{x^2 - 7x + 12} \right| < 1$.

22. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 7x^2 + 13x > 2, \\ -5x^2 + 6x - 1 < 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 1 \leq 0, \\ 3x^2 - 7x + 2 \leq 0, \\ -x^2 + 2x - 5 < 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} |3x^2 - 8x + 4| + x - 1 < 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x - 1) \geq 4(x + 1), \\ x^2 + 4x > 0; \end{cases}$

$$e) \begin{cases} \frac{|x-3|+|3-x|}{16-x^2} \leq 1, \\ \frac{|x-3|+|3-x|}{16-x^2} \geq -1. \end{cases}$$

23. Să se determine m astfel încât:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0, (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

24. Să se determine m astfel încât:

$$x^2 + y^2 - 2x - y + m > 0, (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

25. Să se rezolve inecuația $5x^2 - 20x + 26 \geq \frac{4}{x^2 - 4x + 5}$.

26. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2x$. Să se calculeze:

a) $f([0, 2])$; b) $f([-2, 4])$; c) $f([1, 6])$; d) $f([-10, 0])$ (a se vedea ex. 29, cap. III).

27. Fie funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se calculeze:

a) $f([-4, 0])$; b) $f([1, 6])$; c) $f([3, 5])$;
d) $f([3, +\infty))$; e) $f((-\infty, -1])$; f) $f((-\infty, 3])$.

28. Să se determine $\text{Im } f$ (a se vedea ex. 29, cap. III) pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 5x - 6$; b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - x + 1$;

c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x^2 - 4| + 3$; d) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x + 1}$;

e) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 3}$;

f) $f: \mathbf{R} \setminus \{1, 3\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$,

g) $f: \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{a+b}{2} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - ab}{2x - a - b}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

29. Fie fracția $E = \frac{x^2 + 2mx + 3m - 2}{x^2 + 2x + m}$. Să se determine m astfel încât fracția E să aibă sens și să fie pozitivă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

$$30. \text{ Fie fracția } E = \frac{-x^2 + (m+1)x - \frac{1}{2}}{x^2 + 2mx + m^2 + 1}.$$

I) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, fracția E are sens oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

II) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel încât E să fie negativă, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

31. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$ ($a \in \mathbf{R}$). Să se determine valorile lui a , astfel încât $\text{Im } f \subset [-3, 2]$.

32. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$. Să se determine \bar{m} și n astfel încât $\text{Im } f = [-3, 5]$.

33. Pentru ce valori ale lui a , între rădăcinile ecuației $x^2 - 2(a-1)x - 2a + 1 = 0$, există relația $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} \geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

34. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are coeficientul lui x^2 egal cu 1, știind că discriminantul și produsul rădăcinilor sale sunt, respectiv, $\Delta = -2m^2 + m + 1$, $p = \frac{3}{4}(2m^2 + m)$.

Să se determine m astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 să verifice inegalitatea $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} > m$.

35. Se dă ecuația $mx^2 - 2(m+1)x + 8 = 0$ și se cere:

a) Să se discute rădăcinile ecuației după valoarea parametrului m .

b) Să se determine m astfel încât să avem $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > x_1 + x_2$, x_1 și x_2

fiind rădăcinile ecuației date.

36. Se dau ecuațiile: $x^2 - (m+1)x + m^2 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2 și $y^2 - (m+3)y + 12m + 11 = 0$ cu rădăcinile y_1 și y_2 .

Să se determine m astfel ca între rădăcinile ecuațiilor să avem:

$$2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \leq x_1 x_2 + y_1 y_2$$

37. Se consideră ecuația de gradul al doilea:

$$(1 + \alpha^2)x^2 - (1 + \alpha)x + \alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Să se determine parametrul α pentru care are loc inegalitatea:

$$-1 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \leq 0.$$

38. Se dă ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$ și se cere:

a) pentru ce valori ale lui m o rădăcină este dublă celeilalte ?

b) pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației verifică

inegalitatea $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 x_2$?

39. Considerăm funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x < -3, \\ -2x - 5, & x \geq -3 \end{cases}$ și

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 4, & x > 1. \end{cases}$$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

40. Considerăm funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ -5x - 1, & x > 0 \end{cases}$ și

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 0, \\ 3x^2 - 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

41. Considerăm funcțiile $f, g: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ definite în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x, & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq x < 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{4} < x < 1; \end{cases}$$

Să se calculeze $g \circ f$ și $f \circ g$.

42. Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m-1, m \neq 0$$

I) Să se arate că vârfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $x + y = 0$.

II) Ce porțiune din această dreaptă cuprinde vârful parabolilor cu ramurile în sus (respectiv în jos) ?

43. Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 + 7(m-1)x + m - 1.$$

Pentru ce valori ale lui m parabolele asociate funcțiilor f_m au vârful deasupra axei Ox ?

44. Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-2)x + m - 2,$$

unde m este un parametru real.

I) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

II) Pentru ce valori ale lui m , parabola asociată funcției f_m are vârful sub axa Ox ?

45. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, parabola asociată funcției de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 2(m-1)x - m$ taie axa Ox în două puncte distincte.

46. Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

I) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

II) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se găsesc sub dreapta $y = \frac{5}{4}$.

47. Fie funcția de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1, m \neq 0.$$

Să se determine m astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcții să se găsească pe prima bisectoare.

48. Să se determine m astfel încât parabola asociată funcției $f(x) = x^2 - 2(m+3)x + m^2$ să taie axa Ox în două puncte.

49. Să se arate că oricare ar fi $m \neq 0$, graficul funcției de gradul al doilea $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + m - 6$ taie axa Ox în două puncte distincte.

50. Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + 1, m \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că există două parabole asociate acestor funcții care sunt tangente axei Ox . Să se arate apoi că aceste două parabole au vârfurile

simetrice față de origine.

51. Să se determine m astfel încât graficele funcțiilor $f(x) = x^2 - 2x - 4$ și $g(x) = -x^2 - 2mx - 6$ să aibă același vârf.

52. Să se arate că graficele funcțiilor $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ și $g(x) = x^2 + 2x - 1$ au două puncte comune.

53. Fie funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să notăm cu S aria cuprinsă între axa Ox și graficul acestei funcții.

Să se arate că $1 < S < 2$.

54. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât graficele funcțiilor $f(x) = x^2 + mx + 1$ și $g(x) = x^2 + x + m$ să se intersecteze pe axa Ox .

55. Fie p un număr prim. Să se arate că intersecția graficului funcției $f(x) = x^2 - 3x - p$ cu axa Ox este formată din două puncte care nu au coordonate raționale.

56. Fie funcția $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Notăm cu S aria cuprinsă între graficul acestei funcții și axa Ox . Să se arate că $10 < S < 16$.

57. Fie funcția de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - (m+3)x + 4m$. Pentru ce valori ale lui m graficul f_m este situat deasupra dreptei $y = -7$?

58. Fie $m \in \mathbf{Z}$. Să se determine m astfel încât vârful parabolei funcției $f(x) = mx^2 - 2(m+7)x + m$ să aibă coordonatele numere întregi.

59. Fie funcția de gradul al doilea:

$$f_m(x) = (m-1)x^2 + 2(m+2)x + m+1, (m \neq 1).$$

Să se determine m astfel încât graficul funcției f_m să fie situat sub axa Ox .

60. Considerăm funcția $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m(m-3)$.

I) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolei funcției f_m se află sub axa Ox ?

II) Pentru ce valori ale lui m , parabola funcției f_m este tangentă axei Ox ?

III) Să se arate că vârfurile parabolilor funcțiilor f_m , când $m \in \mathbf{R}$ se află pe o dreaptă.

61. Fie funcția $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m+2)x + m+3$.

I) Să se arate că graficul acestei funcții taie axa Ox în două puncte distincte.

II) Să se determine m astfel încât rădăcinile ecuației:

$$(m+1)x^2 + 2(m+2)x + m+3 = 0 \text{ să fie mai mici decât } 1.$$

62. Pentru ce valori ale lui m , $(m-1)x^2 + mx + m+1 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

63. Pentru ce valori ale lui m , $(m-1)x^2 + 2mx + m+1 > 0$, oricare ar fi $x > 0$?

64. Pentru ce valori ale lui m , $x^2 - 2mx + m+1 > 0$, $(\forall) x > 0$?

65. Pentru ce valori ale lui m , $(m-1)x^2 + 2mx + 1 > 0$, $(\forall) x > 0$?

66. Pentru ce valori ale lui m , $(m+1)x^2 + 2mx + 1 < 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$?

67. Pentru ce valori ale lui m , $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m-2 > 0$, oricare ar fi $x < 0$?

68. Pentru ce valori ale lui m , $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m-2 < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

69. Pentru ce valori ale lui m , inecuația:

$$(m-1)x^2 + (m+1)x + m+1 > 0,$$

nu are nici o soluție?

70. Fie funcția $f_m: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f_m(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 1, & \text{dacă } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Să se determine valorile lui m pentru care funcția f_m este surjectivă, injectivă, respectiv inversabilă. În cazul în care f_m este inversabilă, să se determine inversa funcției f_m .

71. Să se determine numerele m și n astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 - (3m-4)x - 6(m-1) = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid (n-1)x^2 - (n-1)x + 6(n-2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

72. Să se determine numerele m și n astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - (3m-7)x - 6(m-2) = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid nx^2 +$$

$$+nx + 3(2n - 2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

73. Să se determine m astfel încât:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^2 + mx - 22 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m+4)x + 14 = 0\} \neq \emptyset.$$

74. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (3m+1)x^2 + (3m+2)x + 2m+5 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid (2m+5)x^2 + (3m+2)x + 3m+1 = 0\}$$

să aibă trei elemente.

75. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx - 4 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 2m = 0\}$$

să aibă exact două elemente.

76. Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât ecuația:

$$x|x+2a|+1-a=0$$

să aibă o unică soluție.

77. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap [1, +\infty) \neq \emptyset.$$

78. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cap [1, +\infty)$$
 să aibă două elemente.

79. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap [1, +\infty) = \emptyset.$$

80. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cap (-\infty, -1]$$
 să aibă două elemente.

81. Să se determine m astfel încât

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\} \cap (-\infty, -1] \neq \emptyset.$$

82. Să se determine m astfel încât:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\} \cap (-\infty, -1] = \emptyset.$$

83. Fie $a, b \in \mathbf{R}, 0 < a < b$. Dacă $b < m < \frac{a^2 + b^2}{2a}$, atunci mulțimea

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2m(m-a)x + m^2(m^2 - b^2) = 0\right\} \cap [0, +\infty)$$

are două elemente.

84. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)x + b^2c^2 = 0\right\} \neq \emptyset.$$

85. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât mulțimea

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0\right\} \cap [2, +\infty)$$

să aibă un singur element.

86. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m^2 - 1)x^2 - (2m - 1)x + 1 = 0\right\} \cap (-\infty, 1]$$

să aibă un singur element.

87. Să se determine m astfel încât:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0\right\} \cap [-1, 1] \neq \emptyset.$$

88. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m+2)x^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0\right\} \cap [-1, 1]$$

să aibă două elemente.

89. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0\right\} \cap [-1, 1]$$

să aibă un singur element.

90. Să se determine m astfel încât:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid (m+1)x^2 - 2(m-1)x - m = 0\right\} \cap [0, 1] = \emptyset.$$

91. Fie numerele reale a, b, c, a', b', c' astfel încât $a \neq 0, a' \neq 0$ și $ac + a'c' \geq 0$.

Dacă $\left\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} \neq \emptyset$ și $\left\{x \in \mathbf{R} \mid a'x^2 + b'x + c' = 0\right\} \neq \emptyset$

atunci $\left\{x \in \mathbf{R} \mid aa'x^2 + bb'x + cc' = 0\right\} \neq \emptyset$.

92. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\right\} \cap (-\infty, 1]$$
 să aibă două elemente.

93. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0\} \cap (0, 3)$ să aibă două elemente.

94. Să se determine m astfel încât:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap [0, 1] = \emptyset.$$

95. Să se determine m astfel încât mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m + 5 = 0\} \cap [5, 7] \neq \emptyset.$$

96. Pentru ce valori ale lui m , funcția de gradul al doilea $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5m^2x^2 - (5m+1)x + 1$, are semn constant pe intervalul $(-1, 1)$?

97. Fie polinomul $P(x) = x^2 + bx + c$, cu $b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

I) Dacă rădăcinile polinomului sunt reale, atunci $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, dacă și numai dacă $1 + b + c > 0$, $1 - b + c > 0$ și $|c| < 1$.

II) Dacă rădăcinile polinomului nu sunt reale, atunci $|x_1| < 1$ și $|x_2| < 1$, dacă și numai dacă $|c| < 1$.

98. Dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + y + z = 2$, $xy + yz + zx = 1$, să se arate că $x, y, z \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

99. Să se determine toate mulțimile finite $A \subset \mathbf{R}$ care au proprietatea că oricare ar fi $x \in A$, atunci $x^2 - |x| + 1 \in A$.

100. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^5 - y^5 = 31 \end{cases}$$

101. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = x + 2y; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x^2 + 2y^2 - xy = 7; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x^2 + xy + y = -1. \end{cases}$

102. Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 7y^2 = 15, \\ -x^2 + 3xy = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 2y^2 = -1, \\ x^2 + 5y^2 = 21; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -5, \\ xy = 12; \end{cases}$

$$d) \begin{cases} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 118, \\ x^2 - xy - y^2 = -41; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 = p, \\ x^2y + xy^2 + y^3 = q; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1; \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{16}; \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + y = -3, \\ x + z = -2, \\ xy + xz + yz = 2; \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x + y + z = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27; \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} xy + xz = -8, \\ xy + yz = 1, \\ yz + xz = -3. \end{cases}$$

103. Să se arate că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a, \\ x_3 - x_4 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \end{cases} \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

are o soluție pozitivă dacă și numai dacă $|a| + |b| < 1$.

104. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 = a + (y - z)^2, \\ y^2 = b + (z - x)^2, \\ z^2 = c + (x - y)^2. \end{cases} \quad (abc > 0).$$

105. Pentru ce valori ale lui a , sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a, \end{cases}$ are o unică soluție reală ?

106. Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

107. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui a sistemul are două soluții ?

108. Fie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x + a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui a sistemul are două, respectiv trei, soluții ?

109. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, următoarele sisteme simetrice:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + xy + 2y = 59, \\ 3x - 2xy + 3y = -34; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + 2xy = -11, \\ 2x^2y + 2xy^2 = -12; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^3 + y^3 = \frac{133}{1000}, \\ x + y = \frac{7}{10}; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2xy + 5(x + y) = 55, \\ 6xy + 3(x + y) = 81; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y), \\ x^3 + y^3 = x + y; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + y = 3, \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{9}{2}; \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x + y = 2, \\ x^4 + y^4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15; \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = 0, \\ xyz = 0. \end{cases}$$

110. Să se determine toate soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4y - 1 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - 1 = 0, \end{cases}$$

care îndeplinesc condiția $xy > 0$.

111. Să se determine toate soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} (2 - x)(3x - 2z) = 3 - z, \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2, \\ z^2 + y^2 = 6z, \end{cases}$$

care îndeplinesc condiția $z \leq 3$.

112. Să se determine valorile lui a real, astfel încât sistemul de

inecuații:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2, \end{cases}$$

să aibă soluție.

113. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x^3 y^3 z^4 = 1, \\ x^2 y^4 z^4 = 2, \\ x^2 y^3 z^5 = 3. \end{cases}$$

114. Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}, \\ x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = b^p. \end{cases}$$

115. Să se rezolve sistemele:

a)
$$\begin{cases} |2x + y| = 3, \\ \left| \frac{4x-1}{2x+y} \right| + \left| \frac{2x+y}{3x-2} \right| = 4; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} |x-2| + |y-1| = 1, \\ |x^2 - 3x + 2| + 4y = 6. \end{cases}$$

116. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_8 - x_9 + x_{10} = 1, \\ x_9 - x_{10} + x_1 = 1, \\ x_{10} - x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

117. Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} \frac{x_2 x_3 \dots x_n}{x_1} = a_1, \\ \frac{x_1 x_3 \dots x_n}{x_2} = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}{x_n} = a_n. \end{cases}$$

118. Să se determine numerele reale x_1, x_2, \dots, x_n astfel încât:

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

119. Fie a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) numere reale pozitive. Să se rezolve

sistemul:
$$\begin{cases} x_1 x_2 = a_1, \\ x_2 x_3 = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} x_n = a_{n-1}, \\ x_n x_1 = a_n. \end{cases}$$

120. Pe o dreaptă (Δ) se consideră $\|AB\| = a$, iar pe segmentul $|AB|$ se ia punctul M . Triunghiurile echilaterale având date bazele $|AM|$ și $|MB|$, să se găsească minimul ariei sumei celor două triunghiuri.

121. Fie AD mediana unui triunghi oarecare ABC . Să se determine $M \in |AD|$ astfel încât $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$ să fie minimă.

122. Se dau două surse de lumină A și B de intensitate, respectiv, 100 A și 81 A. Să se determine pe dreapta AB un punct M egal luminat de ambele surse. Distanța dintre A și B este egală cu 20 m.

123. Se dă un cerc de rază $R = 10$ m. Pe un diametru $|AB|$ al cercului se alege un punct M și se construiesc cercurile de diametre $|AM|$ și $|MB|$. Să se determine poziția punctului M astfel ca aria cuprinsă între cele două cercuri să fie maximă.

124. Să se determine pe un segment $|AB|$ de 20 cm un punct M astfel ca suma ariilor cercurilor construite pe $|AM|$ și $|BM|$ ca diametre să fie minimă.

125. Să se împrejmuiască un loc în formă de dreptunghi cu un gard a cărui lungime este de 120 m. Cât trebuie să fie laturile acestui dreptunghi astfel încât aria locului să fie maximă ?

126. Din bucăți de materiale triunghiulare, o croitoreasă vrea să coasă fețe de masă dreptunghiulare. Cum trebuie croite fețele de masă astfel încât să se piardă cât mai puțin material ?

127. Aria unui dreptunghi este egală cu 81 dm^2 . Să se afle dimensiunile sale astfel încât perimetrul să fie minim.

128. Două mașini pot transporta o cantitate de materiale timp de 5 zile. Prima mașină merge 200 km pe zi și consumă 12 litri la suta de kilometri. A doua mașină merge 300 km pe zi și consumă 18 litri la suta de kilometri. Câte zile trebuie să transporte materiale fiecare mașină astfel încât cantitatea de benzină să fie minimă ?

129. Fie triunghiul ABC în care se cunoaște $\|AB\| = 5$ cm, iar suma $\|BC\|$ și $\|AC\|$ este egală cu 7 cm. Să se afle înălțimea triunghiului astfel ca aria să fie maximă.

130. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu același perimetru, să se găsească acelea care au raza cercului înscris maximă.

131. Să se determine $x, y, z \in \mathbf{R}$, astfel încât:

$$\begin{cases} 2x = y + \frac{2}{y}, \\ 2y = z + \frac{2}{z}, \\ 2z = x + \frac{2}{x}. \end{cases}$$

132. Să se determine numerele reale x, y, z care satisfac egalitățile:

$$x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)^2 = z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{xyz}.$$

133. Să se determine toate soluțiile reale ale sistemelor de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0, \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0, \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

Capitolul VI PUTERI ȘI RADICALI

1. Să se calculeze:

$$\text{a) } \left[7 - 5 \left(\frac{6}{13} \right)^0 \right]^{-1};$$

$$\text{b) } \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{-1} - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right]^{-2};$$

$$\text{c) } \frac{3^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{4}{5}\right)^0 - 18 \cdot 3^{-3}};$$

$$\text{d) } \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$$

2. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{4x^{-2} - 9y^{-2}}{a - b} \cdot \frac{a^{-2} - b^{-2}}{2x^{-1} + 3y^{-1}};$$

$$\text{b) } \frac{a^{-3} - b^{-3}}{x^{-1} + y^{-1}} \cdot \frac{x + y}{a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}};$$

$$\text{c) } \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-3} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-2} \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2; \quad \text{d) } [-(1-a)^{-1}]^{-1} \left[\frac{a(a-2) + a^0}{a^2 - a + 1} \right]^{-1};$$

$$\text{e) } \frac{a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}} + a^3(a^2 - 2ab + b^2)^{-2}.$$

3. Să se calculeze:

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{2} - a^{-1}}{4 - \left(\frac{1}{a}\right)^{-2}} : \left[\frac{1}{2^{-2}(2+a)} - 2a^{-1} - 1 \right] \text{ și să i se afle valoarea pentru } a = -\frac{1}{3};$$

$$\text{b) } \left\{ a + \left[1 + \left(\frac{3-a}{a+1} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1} \text{ și să i se afle valoarea pentru } a = -\frac{1}{4}.$$

4. Să se efectueze:

$(x+y+z)^5 - (-x+y+z)^5 - (x-y+z)^5 - (x+y-z)^5$, unde x, y, z sunt numere reale.

5. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2).$$

6. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, cu $a+b \neq 0$, să se demonstreze că:

$$a^3 - b^3 = \left(a \frac{a^3 - 2b^3}{a^3 + b^3} \right)^3 + \left(b \frac{2a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \right)^3.$$

7. I) Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc) =$$

$$= (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd).$$

II) *Generalizare*. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci:

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 - 3 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n a_i a_j a_k = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_i a_j \right).$$

8. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și notăm $\alpha = a+b+c+d$, $\beta = a+b-c-d$, $\gamma = a-b+c-d$, $\delta = a-b-c+d$. Să se calculeze:

$$\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2).$$

9. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a+b+c+d=0$, atunci:

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 = 9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

10. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 \text{ și } a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3 + a_6^3 = 0.$$

Să se arate că:

$$(a_1 + a_3)(a_1 + a_4)(a_1 + a_5)(a_1 + a_6) = (a_2 + a_3)(a_2 + a_4)(a_2 + a_5)(a_2 + a_6).$$

11. Să se afle care dintre numerele următoare este mai mare:

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{8}\right)^4 \text{ sau } \left(-\frac{1}{32}\right)^3; \quad \text{b) } \left(-\frac{6}{7}\right)^4 \text{ sau } \left(\frac{36}{49}\right)^6;$$

$$\text{c) } 81^{150} \cdot 8^{200} \text{ sau } 3^{600} \cdot 16^{75}; \quad \text{d) } 3^{65} \text{ sau } \left(\frac{1}{3}\right)^{-65};$$

$$\text{e) } 81^{-75} \cdot 8^{200} \text{ sau } 3^{-600} \cdot 4^{150};$$

12. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$\text{a) } f_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = 3x^2; \quad \text{b) } f_2: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = x^3 - 2;$$

$$\text{c) } f_3: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_3(x) = (x-2)^2; \quad \text{d) } f_4: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_4(x) = (x+1)^4;$$

$$\text{e) } f_5: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_5(x) = |x+1|^3; \quad \text{f) } f_6: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_6(x) = |x+2|^3.$$

13. Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea funcției putere $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^n$.

14. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$\text{a) } f_1: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = x^{-2} + 1;$$

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^{-3} + 1;$

c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{1}{x-1};$

d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$

15. Să se aducă la o formă mai simplă:

a) $\sqrt{(2+x)^2};$

b) $\sqrt[4]{(|x|-3)^4};$

c) $\sqrt{(-2x^2+3x-1)^2};$

d) $\sqrt[4]{(|x|^2-3x+2)^4}.$

16. Să se efectueze sumele:

a) $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2};$

b) $\sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2};$

c) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2} + \sqrt{(x^2+x+2)^2}.$

17. Să se construiască graficele funcțiilor:

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2};$

b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2};$

c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \sqrt{(2x^2-3x+1)^2} + \sqrt{(x^2+x+2)^2}.$

18. Să se găsească valorile lui x pentru care sunt definiți radicalii sau sumele de radicali:

a) $\sqrt{x-1};$ b) $\sqrt[6]{1-4x};$ c) $\sqrt{-5-3x};$ d) $\sqrt[3]{7x-2};$

e) $\sqrt[3]{x^2-5x+4};$ f) $\sqrt{(x^2-3x+2)^2};$ g) $\sqrt[4]{x^2-5x+4};$

h) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-x^5)x^8};$ i) $\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)};$ j) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x-5};$

k) $\sqrt[5]{7x^2-3} + \sqrt[6]{x^2-2};$ l) $\sqrt{4+x} - \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{15-x};$

m) $3\sqrt[3]{1+x} + \sqrt{|x+2|-7}.$

19. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $3\sqrt{2}$ sau $\sqrt{27};$

b) $3\sqrt[4]{m^3}$ sau $\sqrt[4]{162m^3}$ ($m > 0$);

c) $2a\sqrt{a}$ sau $\sqrt{4a^3}$ ($a > 0$);

d) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$ sau $\sqrt{\frac{3}{2}}$;

e) $\sqrt{\frac{4}{75}}$ sau $3\sqrt{\frac{25}{243}}$;

f) $-3\sqrt[3]{54}$ sau $-2\sqrt[3]{128}$;

g) $2\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$ sau $\sqrt[3]{\frac{8}{375}}$.

20. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

a) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt{8}$, $\sqrt[4]{54}$, $\sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[12]{75}$.

21. Să se determine semnul fiecăruia dintre numerele:

$\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[5]{4} - \sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{31} - \sqrt{10}$; $\sqrt[4]{63} - 2\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{m} - \sqrt[3]{n}$,

m și n fiind numerele reale pozitive.

22. Să se determine care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\sqrt{11} - \sqrt{5}$ sau $\sqrt{19} - \sqrt{11}$; b) $2\sqrt{8 - \sqrt{15}}$ sau $\sqrt{30} + \sqrt[3]{3}$.

23. Să se calculeze:

a) $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2})$;

b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

24. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{10 + \sqrt{24 + \sqrt{40 + \sqrt{60}}}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$;

b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}} - \sqrt[5]{\frac{27}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}}$.

25. Să se scrie numărul $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$ sub forma $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, cu a și b numere raționale.

26. Fără a utiliza formula radicalilor compuși să se transforme radicalul $\sqrt{9 + \sqrt{56}}$ într-o sumă de doi radicali.

27. Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât $a + b + c = 1$, atunci:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5.$$

28. Să se simplifice:

a) $\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} - 2}{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + 2}$;

$$b) \frac{x^3 - 12x + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 16} + 16}{x^3 - 12x + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 16} - 16};$$

$$c) \frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x\sqrt{y} - \sqrt{y}} \quad (x, y \in \mathbf{R}). \text{ Discuție.}$$

29. Să se demonstreze că, dacă $a > b > 0$ sunt numere reale și $m \in \mathbf{N}$, atunci:

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}.$$

Să se deducă de aici că:

$$\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n+1]{n+2}, \quad n \geq 2 \text{ fiind un număr natural.}$$

30. Utilizând formula radicalilor compuși să se aducă la o formă mai simplă radicalii:

$$a) \sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}; \quad b) \sqrt{17 + \sqrt{288}}; \quad c) \sqrt{28 - 16\sqrt{3}};$$

$$d) \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}; \quad e) 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}};$$

$$f) \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}.$$

31. Să se arate că:

$$\begin{aligned} & \sqrt{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}}} + \\ & + \sqrt{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}} \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

32. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

$$a) \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}; \quad b) \frac{5}{\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}}; \quad c) \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}};$$

$$d) \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}; \quad e) \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}};$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{12} - \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

33. Să se demonstreze că:

$$a) \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2} ;$$

$$b) \frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2} - 1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{2} .$$

34. Să se arate că:

$$\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$$

este număr întreg.

35. Să se demonstreze că:

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3} .$$

36. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{(4 + \sqrt{15})^3} + \sqrt{(4 - \sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6 + \sqrt{35})^3} - \sqrt{(6 - \sqrt{35})^3}} \in \mathbb{Q}$$

37. Să se arate că:

$$a) \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6 ;$$

$$b) \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = 3 ;$$

$$c) \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}} = 1 .$$

38. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38} + \sqrt[n]{17\sqrt{5} - 38} = \sqrt{20} .$$

39. Să se calculeze:

$$a) \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} ; \quad b) \sqrt[3]{\sqrt{3} - 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} ;$$

$$c) \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} ; \quad d) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} .$$

40. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

$$a) \frac{1}{2 - \sqrt[3]{3}} ; \quad b) \frac{1}{\sqrt[8]{5} + \sqrt[8]{3}} ; \quad c) \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}} ;$$

$$d) \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}; \quad e) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}}};$$

$$f) \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{3}}; \quad g) \frac{1}{\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{27} + 3}; \quad h) \frac{1}{9\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{3} - 27}.$$

41. Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}},$$

a, b, c fiind numere raționale.

42. Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{1}{a + b\sqrt[3]{k} + c\sqrt[3]{k^2}},$$

unde a, b, c, k sunt numere întregi.

43. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

$$I) \frac{1}{a - \sqrt[n]{b}}; \quad II) \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}}, \quad a \text{ fiind un număr întreg.}$$

44. Să se calculeze:

$$\frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}},$$

unde $x \in (1, 2)$.

$$45. \text{ Fie } f_1(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}},$$

$$f_2(x) = \sqrt{2x + \sqrt{4x-1}} + \sqrt{2x - \sqrt{4x-1}},$$

unde $x \geq \frac{1}{2}$.

$$a) \text{ Să se simplifice } \frac{f_1(x)}{f_2(x)};$$

$$b) \text{ Să se rezolve ecuația } f_1(x) + f_2(x) = 2\sqrt{2}.$$

46. Să se arate că ecuația:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x^2} = \sqrt[3]{x^2+7} - 2$$

are unica soluție $x = -1$.

47. Să se găsească soluțiile reale ale ecuațiilor:

$$a) \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1;$$

$$b) \sqrt{x+2} + 4\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} = 5;$$

$$c) \sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-3} = 4.$$

48. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt{x+9} + x + 8 = 0;$$

$$b) \sqrt{24-10x} = 3-4x;$$

$$c) 1 - \sqrt{13+3x^2} = 2x;$$

$$d) \sqrt{1-\sqrt{x^4-x}} = x-1;$$

$$e) x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12;$$

$$f) \frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}} = 2x-1;$$

$$g) \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4}.$$

49. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{a}{x},$$

a fiind un număr real.

50. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x,$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Discuție.

51. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1; \quad b) \sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1};$$

$$c) \sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 8x + 7} = 0.$$

52. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x^2 - a} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

unde $a \in \mathbb{R}$.

53. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{4x+c},$$

a, b, c fiind numere reale.

54. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-6} + 2\sqrt{5};$$

$$b) \sqrt{x+9} + \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+16};$$

$$c) \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-9} + 4\sqrt{6}.$$

55. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sqrt{x+8a} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+8a+4},$$

a fiind un număr real.

56. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} = c,$$

a, b, c fiind numere reale.

57. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5; \quad \text{b) } \sqrt{x-6} + \sqrt{x-13} = \sqrt{11} + \sqrt{72}.$$

58. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a'x+b'} = \sqrt{ax+c} + \sqrt{a'x+c'},$$

unde a, a', b, b', c, c' sunt numere reale, astfel încât $b+b' = c+c'$.

59. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = a\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}, \text{ unde } a \in \mathbf{R}.$$

60. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} + \frac{\sqrt[n]{a+x}}{a} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b},$$

unde a și b sunt numere reale, iar n este un număr natural. Discuție.

61. I) Să se demonstreze că orice soluție a ecuației:

$$\sqrt[3]{E(x)} + \sqrt[3]{F(x)} = \sqrt[3]{G(x)} \quad (1)$$

este o soluție a ecuației:

$$(E(x) + F(x) - G(x))^3 + 27 E(x)F(x)G(x) = 0. \quad (2)$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluție a ecuației (2) este o soluție a ecuației (1), mai puțin aceea care dă pentru $E(x), F(x), -G(x)$ valori numerice egale.

62. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{b},$$

unde a, b sunt numere reale. Discuție.

63. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} = 0,$$

unde a, b, c sunt numere reale. Discuție.

64. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } \sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} + 3;$$

$$b) \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(4-x)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(4-x)} + 1;$$

$$c) \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = 0;$$

$$d) \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$$

65. I) Să se demonstreze că orice soluție a ecuației:

$$E(x) + F(x)\sqrt[3]{H(x)} + G(x)\sqrt[3]{(H(x))^2} = 0 \quad (1)$$

este soluție a ecuației:

$$(E(x))^3 + (F(x))^3 H(x) + (G(x))^3 (H(x))^2 - 3E(x)F(x)G(x)H(x) = 0. \quad (2)$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluție a ecuației (2) este o soluție a ecuației (1), mai puțin aceea care dă pentru $E(x), F(x)\sqrt[3]{H(x)}, G(x)\sqrt[3]{(H(x))^2}$ valori numerice egale.

66. Să se rezolve ecuația:

$$3x + 1 + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0.$$

67. I) Fie a, b, c numere reale nenule și notăm:

$$\alpha = ab + ac - bc, \quad \beta = bc + ba - ca, \quad \gamma = ca + cb - ab.$$

Să se arate că sunt echivalente următoarele două propoziții:

1) $abc > 0$ și α, β, γ sunt de același semn;

2) $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$.

II) Cu notațiile de mai înainte, să se rezolve ecuația:

$$x = \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} + \sqrt{c-x}\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x}\sqrt{b-x}.$$

Să se arate că pentru ca ecuația să aibă soluție diferită de a, b, c este necesar și suficient să fie îndeplinită una din condițiile echivalente precedente.

68. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}},$$

a fiind un număr real, $0 < a < \frac{1}{4}$.

69. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt[3]{\sqrt{x}+3} + \sqrt[3]{13-\sqrt{x}} = 4; \quad b) \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1;$$

$$c) \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x-4} = 2;$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+18}}{\sqrt[3]{x+18} - \sqrt[3]{x-1}} = 5.$$

70. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x+1);$$

$$b) (x-2)^2 + 4(x-2) + \sqrt{x}(4-\sqrt{x}) = 0;$$

$$c) (x-4)^2 + 4x - 27 = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

71. Să se rezolve ecuația:

$$3 \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}} = 10 \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}.$$

72. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 3; \quad b) \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2};$$

$$c) \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9};$$

$$d) \sqrt{x^4 - 18x^2 + 81} - 2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2} + x + 7 = 0.$$

73. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} + \sqrt{x-c} + d = 0,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și $d > 0$.

74. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1};$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{\sqrt{3x^2 + 4x - 4}};$$

$$c) \frac{x-8}{\sqrt{3x-4}} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{x+3};$$

$$d) \sqrt{2x+4} - \sqrt{8-4x} = \frac{12x-8}{\sqrt{6x+20}};$$

$$e) \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{2x+6} - \frac{9}{4} = x+1.$$

75. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația:

$$\sqrt{2|x| - 2x} = 5m - x$$

să aibă trei rădăcini reale.

76. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x^2 - 7x} + \sqrt{x - 5} + \sqrt[4]{4 - x} = 7$;

b) $\sqrt{x - 6} + \sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[4]{6 - x} = 2$.

77. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} = 1$; b) $\sqrt{x - 2} + \sqrt[3]{4 - x} = 2$;

c) $\sqrt[4]{x - 9} - \sqrt[3]{x + 2} = -1$; d) $\sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{3 - x} = 1$.

78. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{(39 - x)\sqrt[5]{x - 6} - (x - 6)\sqrt[5]{39 - x}}{\sqrt[5]{39 - x} - \sqrt[5]{x - 6}} = 30 .$$

79. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[5]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[5]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2$;

b) $4\sqrt[4]{\frac{1 - x}{1 + x}}\sqrt[4]{\frac{1 - a}{1 + a}} + 4\sqrt[4]{\frac{1 + x}{1 - x}} = 24\sqrt[4]{\frac{1 - a}{1 + a}}$;

c) $7\sqrt[7]{1 + \frac{x}{a}} + 7\sqrt[7]{\frac{a + x}{b}} = 7\sqrt[7]{\frac{x}{ab}}$;

d) $\frac{2x + 1}{2x - 1}\sqrt[3]{\frac{2x + 1}{2x - 1}} + \frac{2x - 1}{2x + 1}\sqrt[3]{\frac{2x - 1}{2x + 1}} + 1 = 0$;

e) $\sqrt[3]{x + a} - \sqrt[3]{x - a} = \sqrt[3]{b}$; f) $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$,

a, b, c fiind numere reale.

80. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[n]{(x + 1)^2} + \sqrt[n]{(x - 1)^2} = \frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2 - 1}$;

b) $\sqrt[n]{(1 + x)^2} - \sqrt[n]{(1 - x + x^2)^2} = \sqrt[n]{1 + x^3}$;

c) $\sqrt[m]{(x + a)^2} + 2\sqrt[m]{(a - x)^2} = 3\sqrt[m]{a^2 - x^2}$;

d) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 2\sqrt{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{1 - x}$;

e) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} - 2\sqrt{1 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{1 - \sqrt[3]{x^2}}$;

f) $\sqrt[n]{1 + \sqrt[p]{x}} - 2\sqrt[n]{1 - \sqrt[p]{x}} = \sqrt[2n]{1 - \sqrt[p]{x^2}}$.

81. Să se rezolve inecuația:

$$\sqrt{x^2 - a^2} > x - \sqrt{2ax - a^2},$$

a fiind un număr real.

82. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14;$

b) $2\sqrt{x(x+7)} < 29 - 2x;$

c) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x;$

d) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 6} > x - 2.$

83. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3;$

b) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1};$

c) $\frac{\sqrt{24 - 2x - x^2}}{x} < 1;$

d) $\sqrt{2 - \sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}.$

84. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{x-1} + x - 3 \geq \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2};$

b) $\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x+1}{4} < \sqrt{2x-1 + \frac{(x+1)^2}{8}};$

c) $\sqrt{x+7} - 1 < \sqrt{-x-5} + \sqrt{(x+7)(-x-5)};$

d) $\frac{2\sqrt{x+1}}{1 - 2\sqrt{3-x}} < 1;$ e) $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$ (pentru $x \geq 2$);

f) $\sqrt{(x+4)(x-3)} < 6x - 3;$

g) $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2.$

85. Să se calculeze:

a) $\frac{2^{1/2} + 2 \cdot 5^{-1}}{2^{-1/3} - 2^{-1/6} 5^{-2/3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{5}};$

b) $\frac{2^{7/3} - 2^{8/3} \cdot 2^{2/3} + 2^3 \sqrt[3]{3^4}}{2^{5/3} - \sqrt[3]{48} - 2 \cdot 3^{2/3} + 3 \cdot 2^{2/3}} : \sqrt[3]{2}.$

86. Să se efectueze:

I) $\frac{2b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} + (a-b)^{-1} \left[\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a^{1/2} + b^{1/2}} - \sqrt{ab} \right],$ pentru $a, b > 0,$

$$\text{II)} \left\{ \left(1 - a^2\right) \left[\frac{1 - a^{3/2}}{1 - a^{1/2}} + a^{1/2} \left[\frac{1 + a^{3/2}}{1 + a^{1/2}} - a^{1/2} \right]^{-1} \right] + 1 \right\} : \sqrt{(1 - 2a + a^2)^{-1}},$$

pentru $a > 1$;

$$\text{III)} \left(\frac{a^3\sqrt{a} - 2a^3\sqrt{b} + \sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab}} + \frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \right) : \sqrt[3]{a}, \text{ pentru } a, b > 0,$$

numere reale.

87. Să se efectueze:

$$\text{I)} \frac{1}{a^2c} \sqrt{3a^8c^4d} + \frac{2}{ac^2} \sqrt{12a^6c^6d} - a^4c^2 \sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}, \text{ unde } a, b, c, d \text{ sunt}$$

numere reale pozitive; aceeași problemă, dacă a, b, c, d , cu $d \geq 0$, sunt numere reale oarecare;

$$\text{II)} \frac{24a^5b^2}{d^2} \sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}} : \left(\frac{4a^2}{b} \sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}} \right), \text{ unde } a, b, c, d \text{ sunt numere reale}$$

pozitive.

88. Să se calculeze:

$$\text{I)} \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{(a^2 - ab)^{2/3}} : \frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a^2}(a^{3/2} + b^{3/2})}, \text{ pentru } a = \frac{6}{5}, b = \frac{3}{5};$$

$$\text{II)} (1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 + \sqrt[8]{a})(1 + \sqrt[16]{a})(1 - \sqrt[16]{a}), \text{ pentru } a = 2;$$

$$\text{III)} \left[\frac{(1 - x^2)^{-1/2} + 1}{(1 - x^2)^{-1/2} - 1} \right]^{-1/2} + \left[\frac{(1 - x^2)^{-1/2} - 1}{(1 - x^2)^{-1/2} + 1} \right]^{-1/2}$$

pentru $x = 2a^{1/2}(1 + a)^{-1}, a > 1$;

$$\text{IV)} \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}, \text{ pentru } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \text{ unde } a, b > 0.$$

Acceași problemă pentru cazul în care $a, b < 0$.

89. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă și adaos, cu eroarea indicată, pentru numerele:

a) $\sqrt[3]{72351}$ cu o eroare mai mică decât 1;

b) $\sqrt{2.5}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-1} ;

c) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3} .

90. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1};$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

91. Dacă $s = \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + \frac{1}{\sqrt{10002}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$, să se arate că $|s - 1800| < 0,02$.

92. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că:

$$\frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2} \right] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right];$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}.$$

93. Să se determine toate valorile posibile ale expresiei:

$$\sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1},$$

pentru $a \in \mathbb{R}$.

94. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{x - \sqrt{y}} = 1, \\ \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt[3]{x - y} = \sqrt{x - y}, \\ \sqrt[3]{x + y} = \sqrt[3]{x - y} + 8; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} + 1} \right)^{-1/2} + \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} + 1} \right)^{-1/2} = 2, \\ xy = 1; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4}, \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x - 2y}} = 2, \\ x^2 - 4xy + 6x = 8; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 2} = 5, \\ x + 20y = 23. \end{cases}$$

Capitolul VII NUMERE COMPLEXE

1. Să se găsească numerele reale x și y dacă:

- a) $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$; b) $(2 + i)x - (2 - i)y = x - y + 2i$;
c) $(4 - 3i)x^2 + (3 + 2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$; d) $\frac{x - 3}{3 + i} + \frac{y - 3}{3 - i} = i$;
e) $3\sqrt{x^2 - 2y} + (1 - i)x^2 = 2(1 + 2i)y + 4 - 19i$;
f) $(x - a)(x + a - 2 + 2i) + (y - b)(y + b - i) = 0$.

2. Să se calculeze:

- a) $(2 - i)^2$; $(2 + i)^2$; $(2 - i)^3$; $(2 + i)^3$; b) $(2 - 4i)(5 + 2i)$; $(4 + 5i)(1 - 2i)$;
 $(3 - \sqrt{2}i)^2(3 + \sqrt{2}i)$; c) $\frac{i - 6}{2 + 5i}$; $\frac{1 + i}{3 - i} + \frac{3 - i}{1 + i}$; $\frac{i - 6}{2 + 5i} + \frac{2 - i}{2 + i}$; $\frac{3 + 7i}{2 + 3i} + \frac{5 - 8i}{2 - 3i}$;
d) $\frac{(1 + i)^2}{1 - i} + \frac{(1 - i)^3}{(1 + i)^2}$; $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{32}$.

3. Să se arate că $1 + 3i$ și $1 - 3i$ sunt soluții ale ecuației:

$$x^3 - x^2 + 8x + 10 = 0.$$

4. Să se arate că numerele complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sunt soluții ale ecuației $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

5. Dacă ε este oricare dintre numerele $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se

calculeze:

a) $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, ε^n , unde $n \in \mathbf{N}$; b) $\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$; $\frac{\varepsilon^3-1}{1-\varepsilon^2}$;

c) $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)$; $(a\varepsilon+b\varepsilon^2)(a\varepsilon^2+b\varepsilon)$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

d) $(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

6. Să se verifice egalitățile:

a) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$; b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5 = -1$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6 + \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6 = -2$.

7. Fie numerele complexe

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \text{ și } z_2 = \frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}$$

Să se calculeze: $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1^2 + z_2^2$, $z_1^3 + z_2^3$, $z_1^4 + z_2^4$, $z_2^5 z_1^{-3}$.

8. Să se determine numerele complexe z , astfel încât numărul $(z-1)(z+i)$ să fie real.

9. Să se aducă la forma algebrică simplă, numerele:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; b) $\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2 - \left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^2$; c) $\frac{(a+i)^3 - (a-i)^3}{(a+i)^2 - (a-i)^2}$.

10. Să se calculeze:

a) $(1+i)^{200}$; b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$; c) $\left(\frac{5-17i}{11-6i}\right)^n + \left(\frac{5+13i}{9+4i}\right)^n$;
d) $\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. Dacă α, β sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze:

a) $\alpha^{1980} + \beta^{1980}$; b) $\alpha^{1981} + \beta^{1981}$; c) $\alpha^{1982} + \beta^{1982}$; d) $(1+\alpha)^{1980} + (1+\beta)^{1980}$.

12. Dacă α, β sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze:

a) $\alpha^n + \beta^n$; b) $(1+\alpha)^n + (1+\alpha^2)^n + (\alpha+\alpha^2)^n$; c) $(1+\beta)^n + (1+\beta^2)^n + (\beta+\beta^2)^n$, unde n este un număr natural.

13. Să se calculeze:

$$s_1 = \sum_{k=0}^n i^k, s_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k i^k, \text{ unde } n \text{ este un număr natural.}$$

14. Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}.$$

15. Să se calculeze $|z|$ dacă $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^4$.

16. Să se determine, în fiecare caz în parte, numărul complex z astfel încât:

a) $\left| \frac{z-12}{zi+8} \right| = \frac{5}{3}$ și $\left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$; b) $|z| = |1-z| = |z^2|$;

c) $|z-i| = |z-1| = |z+iz|$.

17. Fie $z, z' \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = |z'| = 1$. Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

18. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$. Să se arate că modulul numărului $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex diferit de -1, de modul 1, poate fi scris în mod unic sub forma precedentă.

19. Să se reprezinte în planul complex numerele:

a) $z_1 = (z+3i)(3-5i)$; b) $z_2 = \frac{3+2i}{1+3i}$.

20. Să se determine punctele din planul complex, care au ca afix numerele complexe z , pentru care:

a) $|z+i| \leq 2$; b) $|z-2i| > 3$; c) $|z| \leq 2$; d) $1 < |2z+3-2i| < 3$;

e) $|i-z| > 4$; f) $|z-2| - |z+2| < 2$; g) $|z+1| < |1-z|$.

21. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 - 1 = 0$; b) $x^3 + 8 = 0$; c) $64x^3 + 1 = 0$; d) $64x^3 - 27 = 0$;

e) $x^4 + 16 = 0$; f) $x^4 - 81 = 0$; g) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$; h) $x^6 - 27x^3 + 27 = 0$.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi $z, z' \in \mathbb{C}$, are loc egalitatea:

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Să se dea o interpretare în planul complex acestei relații.

23. Fie $z, z' \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze că:

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

Mai mult, să se arate că are loc egalitatea dacă și numai dacă există un număr real pozitiv λ astfel încât $z' = \lambda z$.

24. Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| < \frac{1}{3}$, atunci

$$\left| (\sqrt{2}-i)z^3 - iz \right| < \frac{3}{4}.$$

25. a) Fie $m \in \mathbf{Q}$. Să se arate că dacă $z = (4m^2 - 1) + 4mi$ atunci $|z| \in \mathbf{Q}$.
 b) Să se determine toate numerele complexe $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, al căror modul să fie număr întreg.

26. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că numărul:
 $z = (\sqrt[4]{a} + i\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + i^2\sqrt[4]{b}) \dots (\sqrt[4]{a} + i^{4k}\sqrt[4]{b})$ este real.

Dacă P este planul complex, să se determine următoarele mulțimi:

27. $A = \{(x, y) \in P \mid |z - 2i| = 6, \text{ unde } z = x + iy\}.$

28. $B = \left\{ (x, y) \in P \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-6}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{z-2}{z-6}\right), \text{ unde } z = x + iy \right\}.$

29. $C = \left\{ (x, y) \in P \mid \frac{1+\bar{z}}{z} \in \mathbf{R}, \text{ unde } z = x + iy \right\}.$

30. $D = \left\{ (x, y) \in P \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = 0, \text{ unde } z = x + iy \right\}.$

31. $E = \left\{ (x, y) \in P \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right), \text{ unde } z = x + iy \right\}.$

32. Să se arate că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale și distincte, atunci ecuația $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ are rădăcini complexe.

33. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația $(2a + 1)x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ să aibă rădăcini complexe.

34. Să se descompună în produs de polinoame de gradul întâi polinoamele: $x^4 + x, x^3 - 1, x^4 + 16$.

35. Să se determine numerele complexe z , astfel încât:

a) $|z| - 2z = 3 - 4i$; b) $|z| + z = 3 + 4i$.

36. Fie $u \in \mathbf{R}, u \neq 1$. Să se găsească condiții în care produsul $(1 + ui)(1 + ui^2)(1 + ui^3) \dots (1 + ui^n)$, $n \in \mathbf{N}$, să fie: a) real; b) imaginar.

37. Fie numărul $\alpha = (u + iv)^n + (v + iu)^n$, unde $u, v \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$. Să se determine n astfel încât numărul α să fie: a) real; b) imaginar.

38. Să se găsească relația dintre x și y astfel încât numărul $(x + iy)^2$, să fie: a) real; b) imaginar.

39. Să se găsească condiția în care numărul $(x + iy)^3$ este:

a) un număr real mai mare decât 64;

b) un număr imaginar cu modulul mai mare decât 64.

40. Fie $u, v, z \in \mathbf{C}$ astfel încât $|u| < 1$ și $|v| = 1$ și fie $w = v \frac{z - u}{1 - \bar{u}z}$.

Să se arate că $|w| \leq 1$ dacă și numai dacă $|z| \leq 1$.

41. Fie $a \in \mathbf{R}_+$ și $z \in \mathbf{C}$, astfel încât $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$. Să se determine cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

42. Să se determine numerele complexe z astfel încât

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$$

43. Să se determine mulțimea punctelor din plan, de afix z , astfel încât imaginile în plan ale numerelor z , z^2 , z^3 să fie vârfurile unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în punctul de afix z^2 .

44. Fie $a \in \mathbf{C}$ și $z = \frac{a+i}{a-1+2i}$. Să se determine mulțimea punctelor

A din planul complex, de afix a , astfel încât z să fie real.

45. Fie funcția $f: \mathbf{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{C}$, definită prin $f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z - 1}$.

Să se determine mulțimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $f(z) \in \mathbf{R}$.

46. Fie funcția $f: \mathbf{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{C}$, definită prin $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

Să se determine:

a) Mulțimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\operatorname{Im} f(z) = 0$.

b) Mulțimea B a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

47. Să se rezolve ecuațiile în z :

$$\text{a) } 2z + 6i = \frac{1}{2i}z + 5i - 7; \quad \text{b) } (1 + 3i)z + \frac{1-i}{1+i} = (3 - 2i)z + 5;$$

$$\text{c) } (\sqrt{3} + i)z + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{21}{4}iz + 3; \quad \text{d) } (5 + 3i)\bar{z} + \frac{2}{1-i} = (\varepsilon + \varepsilon^2)^2,$$

$$\text{unde } \varepsilon = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

48. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$ astfel încât $z^2 = a + bi$.

Aplicație, pentru numerele: $1 - i$, $1 + i$, $5 - 12i$, $5 + 12i$, $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$.

49. Să se arate că pentru ecuația de gradul al doilea $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, cu coeficienți complecși, rădăcinile sunt date de aceeași formulă ca și în cazul ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali.

50. Să se rezolve ecuațiile în z :

$$\text{a) } z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0; \quad \text{b) } z^2 - 3iz - 3 + i = 0; \quad \text{c) } z^2 + 2z - 7 - 6i = 0;$$

d) $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 = 0$; e) $z^2 - (5 + 2i)z + 3(3 + i) = 0$.

51. Să se rezolve ecuațiile în z :

a) $iz^2 - 2(1 + i)z + 3(2 + i) = 0$; b) $(1 + i)z^2 - (5 + 2i)z + 5 = 0$;

c) $(4 + 3i)z^2 + 2(2 - i)z + 2 - i = 0$; d) $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$.

52. Să se rezolve ecuațiile în z :

a) $z^2 - 2(1 + i\alpha^2)z + 1 - \alpha^4 = 0$;

b) $z^2 - 2z + 1 + \alpha^2 = 0$, α fiind un parametru real.

53. Să se rezolve ecuația $\bar{z} = z^3$.

54. Fie funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \bar{z} + 2, & \text{dacă } z \notin \mathbb{R}, \\ 3z - 1, & \text{dacă } z \in \mathbb{R}. \end{cases}$

a) Să se arate că f este bijectivă și să se determine inversa funcției f ;

b) Să se rezolve ecuația $f(z) = 3z$.

55. Să se simplifice fracțiile:

a) $\frac{X^2 - \sqrt{2}X + 1}{X^4 + 1}$; b) $\frac{X^2 - iX - (1 + i)}{X^2 - 2X + 2}$; c) $\frac{X^3 - 3X^2 + 7X - 5}{X^3 - 5X^2 - 9X - 5}$;

d) $\frac{X^2 - 2aX + a^2 + b^2}{iX^2 - iaX + b(a + bi)}$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

56. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^6 - y^3 = 98, \\ x^4 + x^2y + y^2 = 49; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^6 + y^6 = -16, \\ x^2 + y^2 = -4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^3 - 3y^4 = -19, \\ xy^2 = -6. \end{cases}$

57. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} (1 + 3i)x - 2(1 - 2i)y + 2(3 - i) = 0, \\ 2(2 + i)x - (2 + 3i)y - (5 + 4i) = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2 + 3i)x + (2 - 3i)y = 7, \\ (1 + i)x + (1 - i)y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + (3 - 2i)y = -1 + i, \\ (3 + 2i)x + 3y = 2 + i. \end{cases}$

Capitolul VIII

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. Fie a un număr real pozitiv. Să se decidă care dintre perechile de numere următoare este mai mare:

a) $a^{1+\sqrt{6}}$ și $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ și $a^{\sqrt{3}-2}$.

2. Să se găsească valorile lui x , pentru care sunt definiți radicalii:

a) $\sqrt{(0,2)^x - 25}$; b) $\sqrt[4]{5^x - 0,04}$; c) $\sqrt[3]{3^{-4x} - \sqrt{3}}$; d) $\sqrt{a^x - a^{-x}}$,
 a fiind un număr real pozitiv.

3. Fie funcțiile:

a) $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $f_2 : (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$;

c) $f_3 : [3, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_3(x) = \sqrt{3^x - 27}$;

d) $f_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_4(x) = \frac{1}{3^{|x|}}$;

e) $f_5 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_5(x) = 2^{2x} - 2^{x+3} + 18$.

Să se determine imaginea fiecărei funcții.

4. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care sunt adevărate inegalitățile:

a) $5^{(x-3)^2 - |x-3| - 2} < 1$; b) $(2\sqrt{2})^{x+3} > \left(\frac{1}{8}\right)^{|x-4|}$; c) $\frac{2^x - 4}{3x^2 - 8x + 5} > 0$;

d) $|x|^{x^2 - x - 2} < 1$.

5. Să se traseze graficele funcțiilor:

a) $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = 3^{|x|}$;

b) $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = 3^x + 3^{-x}$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_3(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3}$.

6. Să se găsească valorile lui x , pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_a |x|$; b) $\log_a (5 - x^2)$; c) $\log_a (x^4 - 5x^2 + 4)$; d) $\log_a \sqrt[3]{x^2 - x - 6}$;

e) $\log_a (\log_a x)$; f) $\log_a (\log_b x)$,

unde a și b sunt numere reale pozitive, diferite de 1.

7. Fie a și b numere reale pozitive, diferite de 1. Să se decidă care dintre numerele $\log_a b$ și $\log_b a$ este mai mare.

8. Să se determine valorile lui x , pentru care au loc inegalitățile:

a) $\log_a x \leq 3 \log_a x$; b) $\log_x |x| \geq 3 \log_a |x|$.

9. Pornind de la graficul funcției logaritmice să se traseze graficele următoarelor funcții:

a) $f_1 : (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = \log_3(x - 1)$;

b) $f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = |\log_3 x|$;

c) $f_3 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f_3(x) = \log_3 |x|$;

$$d) f_4 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_4(x) = \log_3 x^2;$$

$$e) f_5 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_5(x) = \log_3 \sqrt{x};$$

$$f) f_6 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_6(x) = \log_3 \frac{x}{3}.$$

10. Să se determine x astfel încât să avem

$$a) \log_a x = \frac{2}{3} \left[\log_a m + \frac{3}{4} \log_a (m+n) - 2 \log_a (m-n) \right] - \frac{1}{2} \log_a n;$$

$$b) \log_a x = -\frac{1}{3} \log_a u + \frac{1}{4} \left[\log_a v - \frac{2}{3} \log_a u + \frac{2}{3} \log_a (u+v) - \frac{1}{2} \log_a (u-v) \right]$$

11. Să se demonstreze că, dacă $2 \log_b x = \log_a x + \log_c x$, atunci $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

12. Să se calculeze $\log_6 16$ în funcție de $a = \log_{12} 27$.

13. Dacă $a = \log_{30} 3$ și $b = \log_{30} 5$, să se calculeze în funcție de a și b numărul $\log_{30} 16$.

14. Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

15. Să se demonstreze că:

$$\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

16. Să se demonstreze că

$$\log_a n \log_b n + \log_b n \log_c n + \log_c n \log_a n = \frac{\log_a n \log_b n \log_c n}{\log_{abc} n}.$$

17. Dacă $2 \log_a (x - 2y) = \log_a x + \log_a y$, să se calculeze $\frac{x}{y}$.

18. Dacă $\log_{60} 3 = m$ și $\log_{60} 5 = n$, să se calculeze în funcție de m și n , numărul $\log_3 4 + \log_{12} 2$.

19. Să se demonstreze că numerele: $\log_2 3$, $\log_5 10$, $\log_{12} 5$ sunt iraționale.

20. Fie a și b numere raționale pozitive, diferite de 1. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca $\log_a b$ să fie un număr rațional.

21. Să se demonstreze că dacă numerele reale a și b sunt astfel încât $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, atunci are loc inegalitatea

$$\log_2 (a+b) > 1 + \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b).$$

22. Fie funcția $f: [1, 64] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \log_2 \left(\frac{8}{x} \right).$$

Să se determine valoarea lui x , pentru care f să aibă valoarea maximă.

23. Să se demonstreze că $\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n$, unde

$a_1, \dots, a_n \in (0, 1)$ sau $a_1, \dots, a_n \in (1, +\infty)$.

24. Să se demonstreze că

$$\log_{a_3} \sqrt[n]{a_1 a_2} + \log_{a_4} \sqrt[n]{a_2 a_3} + \dots + \log_{a_1} \sqrt[n]{a_{n-1} a_n} + \log_{a_2} \sqrt[n]{a_n a_1} \geq 2,$$

unde $a_1, \dots, a_n \in (0, 1)$ sau $a_1, \dots, a_n \in (1, +\infty)$.

25. Să se decidă care dintre numerele $\log_2 3$ și $\log_3 4$ este mai mare.

26. Dacă $\log_{bc} a = x$, $\log_{ca} b = y$ și $\log_{ab} c = z$, să se arate că

$$a^{(x+1)(y-z)} b^{(y+1)(z-x)} c^{(z+1)(x-y)} = 1.$$

27. Să se demonstreze că $\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{zx} y \geq \frac{3}{2}$,

unde $x, y, z \in (0, 1)$ sau $x, y, z \in (1, +\infty)$.

28. Să se arate că $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.

29. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left(\frac{5}{22} \right)^{2x-3} = (4,4)^{3x-2};$

b) $(a^{x^2+x-2})^{3-x} = 1 \quad (a > 0);$

c) $8\sqrt{(0,25)^{5-x/2}} = 2^{\sqrt{x-1}};$

d) $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}};$

e) $2^{1-x^2} \cdot 2^{2x} = 64^{-1};$

f) $\left(\frac{4}{3} \right)^{x-1} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{(\sqrt[4]{3})^{3x-4}};$

g) $4^{|x^2-3x+2|} = 16^{x+1};$

h) $27 \cdot 3^{|x-2|} \cdot 9^{1/2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-3}.$

30. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3^{x+1} + 3^x = 108;$ b) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} + 32 = 0;$ c) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28;$

d) $5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 120.$

31. Să se rezolve ecuațiile:

a) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155;$ b) $2 \cdot 7^{2x+2} + 7^{2x-1} = 687;$ c) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 1;$ d) $3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-4} = 315;$ e) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} = 896;$ f) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 30.$

32. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1};$ b) $3^{x+1} + 5^{x+2} = 3^{x+5} - 3 \cdot 5^{x+3};$ c) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1};$ d) $7^{2x-1} + 7^{2x} + 7^{2x+1} = 5^{2x-1} + 5^{2x} + 5^{2x+1}.$

33. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$; b) $2^x + 4^x = 272$; c) $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$;

d) $64^{1/x} - 2^{3+3/x} + 12 = 0$; e) $3 \cdot 3^{x+2} + 9 = \sqrt{81^{2x-1}} + 3^{4x}$.

34. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3^{4\sqrt{x}} + 2 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3 = 0$; b) $25^{\sqrt{x-3}} - 5 \cdot 5^{\sqrt{x-3}} - 500 = 0$;

c) $3^{2\sqrt[4]{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} + 3 = 0$.

35. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + \frac{16}{3^x - 1} = \frac{1}{3^{x-3}}$; b) $a^{x-2} + a^{2-x} = 2$ ($a > 0$);

c) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$; d) $\sqrt{3^x} + \sqrt{3^{-x}} = 10$.

36. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$; b) $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 98$;

c) $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 2$.

37. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2^{2x} - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0$; b) $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$;

c) $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x = 0$; d) $2^{2x+2} \cdot 10^{x+1} - 10 \cdot 2^{3x} 5^x = 1200$;

e) $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

38. Să se rezolve ecuațiile:

a) $9^{\sqrt{x^2+3}} - 3^{1+\sqrt{x^2+3}} = 54$; b) $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} = 2$.

39. Să se rezolve și să se discute ecuația $\frac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2$, ($a \in \mathbb{R}$).

Să se afle valorile lui a pentru care ecuația are o soluție întreagă.

40. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$;

b) $(x + 4)3^{1-|x-1|} - x = (x + 1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

41. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3^x + 4^x = 5^x$; b) $\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2^{\sqrt{x-3}}$; c) $8^x(3x + 4) = 4$;

d) $(2 + a)^{\sqrt{x-4}} + (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 2$, unde $|a| \leq 1$.

42. Să se determine valorile reale ale lui x , astfel încât să fie satisfăcute inecuațiile:

a) $|x|^{2x^2-3x+1} \leq 1$; b) $\frac{1}{3} \leq \frac{3^x + 1}{9^x + 3} \leq \frac{1}{2}$.

43. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \cdot 3^{1-x} + 2^{1-x} \cdot 3^x$.

Să se arate că f este descrescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ și crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

44. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\log_x(3x^2 - 5x) = 1$; b) $\log_{x+1}(3x^2 + 2x - 3) = 2$;
 c) $\log_{x^2-1} 27 = 3$; d) $\log_{\sqrt{x-1}}(2x^2 + 2x + 5) = 4$;
 e) $\log_{\sqrt{x^2+2}}(2x^4 + x^2 + 6) = 4$;
 f) $\log_{\sqrt{x}}(x + |x - 2|) = \log_x(5x - 6 + 5|x - 2|)$.

45. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\log_a \log_a \log_a x = 0$; b) $\log_a \log_{a^2} \log_{a^3} x = 0$;
 c) $\log_a \log_b \log_c x = 0$; d) $\lg(x+6) - 2 = \frac{1}{2} \lg(2x-3) - \lg 25$;
 e) $\log_x 2 \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$; f) $\log_a(a \log_b(b \log_c x)) = 1$;

46. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\frac{\log_a(x-3)}{\log_a(x^2-3)} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{\log_{x+2} \sqrt[3]{x^2+2}}{\log_{x+2}(2x-1)} = \frac{1}{3}$;
 c) $(\sqrt[3]{x})^{\log_x x^2+2} = 2 \log_3 27$; d) $\frac{1}{2} \lg \sqrt{x^3 - 3a^4} = \lg x + \log \frac{a}{x}$;
 e) $\lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} - 2$;
 f) $\log_{x^2-6x+8} [\log_{2x^2-2x+3}(x^2+2x)] = 0$.

47. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\log_{15} \frac{1}{3^x + x - 5} = x(\log_{15} 5 - 1)$; b) $\lg(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$;
 c) $\lg(x^2 - 3x - 4) - x = \lg(x+1) - 5$; d) $\lg(10^{2x-1} + 7 \cdot 10^{x-1}) =$
 $= \lg(10^{x+1} - 2) - 1$; e) $(x-1)(1 - \log_6 3) = \log_6(2^{x-1} + x - 2)$;
 f) $\log_x(2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$; g) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

48. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\lg^2 x - 4 \lg x + 3 = 0$; b) $\frac{1}{4} \lg^4 x - 3 \lg^2 x + 8 = 0$;
 c) $4 \lg^4 x - 5 \lg^2(x^2) + 16 = 0$; d) $(4 \lg^2(x+1) - 1)(\lg^2(x+1)^2 + 1) = 15$;

e) $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x - 3\sqrt{\log_2 x}} - 6 = 0$; f) $\log_x \sqrt[3]{4} + 3\log_x (x\sqrt[3]{2}) + \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 12$

49. Să se rezolve ecuația $\log_a^m x^n - \log_a^n x^m = 0$, unde m și n sunt numere naturale.

50. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^x = x$; b) $x^{\log_3 x + 4} = 243$; c) $(\sqrt[4]{x})^{\lg x + 7} = 10^{\lg x + 1}$; d) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$;
e) $7^{\log_{25}^2(5x) - 1} - x^{\log_5 7} = 0$; f) $x^{\log_2 x} + 8x^{-\log_2 x} = 6$;
g) $|x - 1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9} = (x - 1)^2$; h) $6^{\log_{\sqrt{3}} x} - 7 \cdot 6^{\log_3 x} + 6 = 0$.

51. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_2 x + \log_3 x = 1$; b) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10} \frac{3}{2} + 1$;
c) $\log_{a^2} x + \log_a x^2 = 1$; d) $\log_2^2(x - 2)^2 - \log_{1/2}(x - 2) = 5$;
e) $\log_5 2 + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{8}$; f) $\log_{x+2} x + \log_x(x + 2) = \frac{5}{2}$.

52. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\log_a x}{\log_b x \log_c x} = \frac{\log_a b}{1 + \log_c a}$$

53. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + 2^x + \log_2 x = 7$; b) $2^x + \log_2 x + 3^{x/2} + \log_3 \frac{x}{2} = 8$.

54. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$;
b) $\log_a x + (a + \log_a x) \log_{\sqrt{x}} a = 2a \log_x a$;
c) $6 \log_x a + 3 \log_{a^2 x} a - \frac{14 \log_{ax} a}{\log_a x} = 0$.

55. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 243, \\ 2^{3y-x} = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 15, \\ \sqrt{2^x} - 3^y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^{y^2-3y+3} = x, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$
d) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250, \\ 2^y \cdot 5^x = 40; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^{2y-1} = 5, \\ x^{y+2} = 3; \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} & \begin{cases} x^y = y^x, & (a > 0, a \neq 1); \\ a^x = b^y, & (b > 0, b \neq 1); \end{cases} & \text{h)} & \begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = b, & (a, b, c > 0); \\ a^{x+y} = c; \end{cases} \\
 \text{i)} & \begin{cases} x^{y-2} + x^{2-y} = \frac{5}{2}, \\ x^y + x^{-y} = \frac{65}{8}; \end{cases} & \text{j)} & \begin{cases} 3^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{y-2}} = 36, \\ 9^{\sqrt[3]{x}} + 4^{\sqrt[4]{y-2}} = 97; \end{cases} & \text{k)} & \begin{cases} x^{x^2-y^2+8x+1} = 1, \\ 2^y = 8 \cdot 2^x; \end{cases} \\
 \text{l)} & \begin{cases} x^y = y^x, & (m \neq n); \\ x^m = y^n, \end{cases} & \text{m)} & \begin{cases} 2^x \cdot 3^y + 2^z = 124, \\ 3^y \cdot 2^z + 2^x = 436, & (x, y, z \in \mathbb{Z}). \\ 2^z \cdot 2^x + 3^y = 91; \end{cases}
 \end{aligned}$$

56. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2 \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1 \end{cases}$$

57. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \begin{cases} \log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3, \\ x^2 + 16y^2 = 17; \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} \lg x - 2 \lg y = 1, \\ x^2 y = 7; \end{cases} & \text{c)} & \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 + y = 12; \end{cases} \\
 \text{d)} & \begin{cases} \log_3 (y-x) = \log_4 (y-2xy), \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} & \text{e)} & \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 0, \\ 2 \log_2 x + \log_2 y = 3; \end{cases} \\
 \text{f)} & \begin{cases} 3^x 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y-x) = 4; \end{cases} & \text{g)} & \begin{cases} x^a = y^b, \\ \log_c \frac{x}{y} = \log_y x, & (a, b, c > 0, c \neq 1); \end{cases} \\
 \text{h)} & \begin{cases} |x|^{\lg y} = 4, \\ xy = 40; \end{cases} & \text{i)} & \begin{cases} 5^{\lg x} - 3^{\lg y} = 0, \\ (3x)^{\lg 3} - (5y)^{\lg 5} = 0; \end{cases} & \text{j)} & \begin{cases} x^y = y^x, \\ x - y \log_x y = (x+y) \log_x y \end{cases} \\
 \text{k)} & \begin{cases} \log_m x + \log_n y = a, \\ \log_n x + \log_m y = b; \end{cases} & \text{l)} & \begin{cases} \log_x y + \log_{3x} y^2 = 4, \\ \log_y x + \log_{3y} x^2 = \frac{7}{6}; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{m)} \begin{cases} (\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 = 2m, \\ x^{\log_a x} + y^{\log_a y} = 2 \cdot \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} a^m \end{cases} \quad \text{n)} \begin{cases} (xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} = a, \\ (yz)^{\lg x} + (yx)^{\lg z} = b, \\ (zx)^{\lg y} + (zy)^{\lg x} = c. \end{cases}$$

$$(p \neq q)$$

58. Să se rezolve

$$\begin{cases} 4 \log_2^2 x + 1 = 2 \log_2 y \\ \log_{\frac{1}{2}} x^2 \leq \log_{\frac{1}{2}} y \end{cases}$$

59. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\log_{1/2}(x^2 + 2x) \geq 0;$

b) $\log_a(6x^2 + 5x + 1) < 0;$

c) $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < 1;$

d) $\log_a(3x^2 - 5x - 3) < \log_a(4x - 3);$

e) $x \log_a 4 < \log_a(2^x + 6);$

f) $\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7;$

g) $\log_{x^2} \left(\frac{4x-5}{|x-2|} \right) \geq \frac{1}{2};$

h) $\log_{\frac{x^2-10x+31}{30}} \left(5x - \frac{11}{20} \right) \leq 0;$

i) $\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}};$

j) $\log_3(3^x - 3) \cdot \log_{1/3}(3^{x+1} - 9) < -6;$

k) $\log_2 \log_{1/2}(x^2 - 3x + 2) \leq 1;$

l) $\log_2 \left(\left| \frac{x-1}{x-5} \right| + 7 \right) > 3;$

m) $\log_x(x+2) > \log_{x+2} x;$

n) $\frac{\ln(2x^2 - 3x + 1)}{x^2 - 3x} \geq 0.$

60. Să se determine valorile lui x , pentru care sunt definiți radicalii următori:

a) $\sqrt{|\ln^3 x + \ln x + |\ln x|| - |\ln^3 x - \ln x + |\ln x||};$ b) $\sqrt{\log_a x + \log_{ax} x}.$

61. Să se determine valorile reale ale lui a , pentru care inegalitatea $\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2 + 3) \geq 1$ este adevărată pentru orice x real.

62. Să se determine valorile reale ale lui a , pentru care inegalitatea $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2 + 2|a|) > 0$ este adevărată pentru orice x real.

63. Să se determine valorile lui a astfel încât inecuația

$\log_{1/a}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$ să aibă o soluție unică.

64. Să se determine toate numerele reale m , astfel încât inegalitatea $m \cdot 4^x + 4(m-1) \cdot 2^x + m > 1$ să fie adevărată pentru orice x real.

65. Să se determine toate numerele reale m , astfel încât inegalitatea $(m+1)e^{-2x} + m(e^{-x} + 1) > 0$ să fie adevărată pentru orice x real.

66. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât mulțimea S a soluțiilor inecuației $4^x - m \cdot 2^x - m + 3 \leq 0$ să fie nevidă. Pentru care valori ale lui m , mulțimea S este infinită?

67. Fie a, b, c numere reale distincte și presupunem că α, β, γ sunt numere reale astfel încât pentru orice număr real x ,

$$\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} + \gamma e^{cx} = 0.$$

Să se arate că $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Capitolul IX INDUCȚIA MATEMATICĂ

1. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, sunt adevărate propozițiile:

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$

c) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$

d) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$ unde $x \neq 1$.

2. Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze, prin inducție matematică, că formulele găsite sunt adevărate pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1);$

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2).$

3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, este adevărată egalitatea $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k + 2 \cdot 3 \dots k(k+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+k)}{k+1}$, unde $k \geq 2$ este un număr natural.

4. Să se calculeze sumele următoare și apoi, să se demonstreze prin inducție matematică formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

5. Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze, prin inducție matematică, formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; b) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; d) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

e) $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$, unde $k \geq 1$ este un număr natural.

6. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, sunt adevărate egalitățile:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

b) $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$.

7. Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formulele găsite:

a) $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$; b) $\sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1)$; c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$;

d) $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$; e) $\sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}$; f) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+k}\sqrt{k+1}}$.

8. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

pentru orice număr natural $n \geq 1$.

9. Să se demonstreze că, pentru orice $n \geq 2$ număr natural, avem:

$$\log_x \sqrt[n]{a} + \log_{x^2} \sqrt[n]{a} + \log_{x^3} \sqrt[n]{a} + \dots + \log_{x^n} \sqrt[n]{a} = \log_x \sqrt[n]{a^n}.$$

10. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, au loc identitățile:

$$a) \cos \alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha};$$

$$b) \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2};$$

$$c) \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}};$$

$$d) \sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}};$$

$$e) \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

11. Să se determine toate numerele întregi x astfel încât

$$3x + 1 < 2 \log_2(x + 4).$$

12. Să se determine numerele naturale n pentru care este îndeplinită inegalitatea $2^n > n^2$.

13. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n , avem

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}.$$

14. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$, au loc inegalitățile: $\sqrt{n} < 2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

15. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

16. Fie a, b numere reale cu $a + b > 0, a \neq b$. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, avem $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$.

17. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că:

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}$, pentru orice număr natural k ;

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}$, pentru orice număr natural $k \leq n$.

Să se deducă de aici, că pentru orice număr natural n , avem

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

18. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 6$, avem:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

19. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$ și numerele reale pozitive a_1, a_2, \dots, a_n , avem $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.
(vezi exercițiul 26, III, cap. IV).

20. a) Dacă x_1, x_2 sunt numere reale astfel încât $x_1 < 1$ și $x_2 > 1$, atunci $x_1 + x_2 \geq x_1 x_2 + 1$.

b) Oricare ar fi $n \geq 2$, natural, și numerele reale pozitive a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

c) Să se demonstreze, folosind punctul b), inegalitățile dintre media armonică, media geometrică și media aritmetică a n numere reale pozitive.

21. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, avem $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$.

22. Să se demonstreze că suma cuburilor oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 9.

23. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n , $n^5 - n$ se divide cu 30.

24. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, următoarele propoziții sunt adevărate:

- a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133; b) $4^n + 15n - 1$ se divide cu 9;
 c) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ se divide cu 17; c) $6^{10n+1} + 5^{11n-1}$ se divide cu 31.

25. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n , $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ se divide cu 23.

26. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, avem:

- a) $2^n > n$; b) $2^{n+2} > 2n + 5$.

27. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 3$, avem:

- a) $2^n > 2n + 1$; b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

28. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 4$, avem $3^n > n^3$. Să se deducă că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, pentru $n \geq 4$.

29. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n , avem

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

30. Să se demonstreze că

$$\{k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 8\} = \{3p + 5q \mid p, q \in \mathbb{N}, 3p + 5q \geq 8\}.$$

31. Să se demonstreze că oricare ar fi n drepte diferite situate în același plan și care sunt concurente, împart planul în $2n$ părți.

32. Să se demonstreze că oricare ar fi n plane, care trec prin același punct, astfel încât oricare trei dintre ele nu au o dreaptă comună, împart spațiul în $n(n-1) + 2$ părți.

33. Să se demonstreze că n drepte situate într-un plan, astfel încât oricare două dintre ele nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente, împart planul în $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ părți.

34. Să se demonstreze că n plane astfel încât:

I) oricare două dintre plane nu sunt paralele;

II) oricare trei dintre plane nu trec printr-o aceeași dreaptă;

III) oricare patru nu trec prin același punct;

IV) oricare două drepte de intersecție ale planelor date nu sunt paralele,

împart spațiul în $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{7}$ părți.

35. Să se demonstreze că n cercuri, situate într-un plan, împart planul în cel mult $n^2 - n + 2$ părți. Dar, dacă cercurile sunt două câte două secante?

36. Fie n pătrate arbitrare, unde n este un număr natural oarecare. Să se demonstreze că ele pot fi tăiate în părți, astfel încât din părțile obținute să se poată construi un nou pătrat.

37. (Teorema lui Euler). Fie s numărul țărilor unei hărți arbitrare, l numărul frontierelor ei și p numărul vârfurilor. Să se arate că $s + p = l + 2$.

38. Dacă p este numărul vârfurilor, l numărul muchiilor și s numărul fețelor unui poliedru convex, să se arate că $s + p = l + 2$.

39. Să se demonstreze că n sfere, astfel încât oricare două se intersectează între ele, și oricare trei nu au un cerc comun, împart spațiul în $\frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}$ părți.

Capitolul X

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$; b) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$.

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420$; b) $\frac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000$.

3. Să se afle pentru câte valori ale lui $n \geq 2$, natural, au loc inegalitățile: a) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 306$; b) $\frac{(2n)!}{n!} < 1000$.

4. În câte moduri se pot așeza cinci copii pe o bancă?

5. a) Popescu, Ionescu, Georgescu, Vasilescu, Stătescu trebuie să vorbească la o întrunire. În câte moduri se poate face ordinea înscrierilor la cuvânt în așa fel încât Ionescu să nu vorbească înaintea lui Popescu?

b) Aceeași problemă cu condiția ca Popescu să ia cuvântul de fiecare dată imediat înaintea lui Ionescu.

6. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele posibile de câte șase cifre, astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice. Să se afle:

a) Câte astfel de numere se pot obține?

b) Câte numere încep cu cifra 1?

c) Câte numere se termină cu cifra 1?

d) Câte numere încep cu 10?

e) Câte numere nu încep cu 10?

7. Să se determine numărul tuturor numerelor naturale de cinci cifre scrise în baza zece, formate din:

a) cifre pare;

b) cifre pare distincte.

8. Câte variante de coliere se pot realiza din șapte mărgelile de dimensiuni diferite, încât fiecare colier să conțină toate cele șapte mărgelile?

9. În câte moduri se pot așeza, pe o tablă de șah, opt turnuri astfel încât nici unul dintre ele să nu poată lua pe celălalt?

10. Fie date n numere a_1, a_2, \dots, a_n . Să se găsească numărul permutărilor acestora, astfel încât a_1, a_2, \dots, a_k să nu ocupe k locuri la rând?

11. În câte moduri se poate ordona mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât fiecare număr divizibil cu 2, și fiecare număr divizibil cu 3, să aibă rangul divizibil cu 2 și respectiv 3?

12. Să se calculeze

a) $\frac{A_n^5 + A_n^7}{A_n^6}$; b) $\frac{A_n^{n-1} - P_n}{C_n^{n-2}}$; c) $\frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}}$; d) $\frac{A_{n+3}^n}{(n+2)A_{n+1}^{n-2}}$;
e) $\frac{A_n^2 \cdot P_k - 2P_{k+1}}{P_{k+1}}$; f) $\frac{A_{n+k}^{n-k+2} + A_{n+k}^{n-k+1}}{A_{n+k}^{n-k}}$; g) $\frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$; h) $\frac{A_n^k \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$.

13. Să se rezolve ecuațiile în n :

a) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; b) $P_{n-3} \cdot A_n^3 = 20P_{n-2}$; c) $A_7^n = mA_7^{n-1}$;
d) $P_{n+2} = 182A_n^{11} \cdot P_{n-11}$; e) $A_{n+1}^{k+1} \cdot P_{n-k} = 90P_{n-1}$.

14. În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziție pânză de steag de cinci culori diferite?

15. Câte dicționare sunt necesare pentru a traduce direct din una în alta din următoarele șase limbi: română, rusă, engleză, franceză, germană, italiană?

16. Cinci creioane de diferite culori se împart la 9 copii de vârstă diferite, fiecare copil primind cel mult un creion. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă copilul mai mic va primi neapărat un creion?

17. Câte numere naturale diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată?

18. În plan sunt date n puncte, oricare trei dintre ele necoliniare. Câte linii poligonale (închise și neînchise) cu k segmente se pot duce cu vârfurile în punctele date?

19. Să se calculeze:

a) $\frac{C_{n+k}^k \cdot P_k - A_{n+k}^k}{P_k}$; b) $\frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-1}^{k-1}}$.

20. Să se calculeze C_n^7 dacă $C_{20}^n = C_{20}^{n+2}$.

21. Să se afle n , dacă:

a) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$; b) $3C_{2n}^{n+1} = 5C_{2n-1}^n$; c) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$;

d) $C_{n+2}^4 = n^2 - 1$; e) $C_{n+3}^{n+1} = n^2 - 4$; f) $C_{7n}^{n^2+10} = C_{28}^2$;

g) $C_{n-2}^2 + C_{n-2}^3 + C_{n-2}^4 = 19$; h) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 = 55$;

i) $30C_{n-3}^{n-9} = 19A_{n-4}^4$

22. Să se rezolve inecuațiile:

a) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$; b) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$; c) $C_{15}^{k-2} > C_{15}^k$; d) $5C_n^3 > C_{n+2}^4$.

23. Să se determine valorile lui n , întregi pentru care numărul $C_{5n+4}^{n^2+3n-4}$ este definit.

24. Un elev are nouă cărți de matematică, iar altul are 7 cărți. În câte moduri pot să schimbe cărțile între ei, o carte în schimbul alteia? Dar dacă schimbă câte două cărți în schimbul altora două?

25. Pentru un joc de agrement, cinci fete și trei băieți trebuie să formeze două echipe de câte patru. În câte moduri se pot forma echipele? Dar dacă în fiecare echipă trebuie să fie neapărat un singur băiat?

26. Pentru întocmirea orarului unei clase de elevi, trebuie să fie programată în fiecare zi, fie o oră de desen din cele două pe săptămână, fie o oră de fizică din cele patru pe săptămână. În câte moduri se poate face această programare?

27. Câte numere de câte cinci cifre se pot forma astfel încât în fiecare număr fiecare cifră să fie mai mare decât precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decât precedenta?

28. Dintr-o grupă de 15 copii, dintre care 9 băieți și 6 fete, trebuie să fie formată o echipă de 7 copii, în care să intre cel puțin 3 fete. În câte moduri se poate forma această echipă?

29. La o serată dansantă participă 7 fete și 8 băieți. La un anumit dans trebuie să se formeze 4 perechi. În câte moduri se pot forma cele patru perechi?

30. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y, \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} = 8A_{2y}^{3x-1}, \\ 9C_{2y}^{3x} = 8C_{2y}^{3x-1}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3}, \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} xC_{n-1}^k + \frac{n}{k}y = \frac{k+1}{n}, \\ xC_{n-1}^{k-1} - \frac{n}{k+1}y = \frac{k}{n}. \end{cases}$

31. Să se arate că:

a) $\frac{C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + \dots + C_{2n}^n}{C_1^1 + C_3^2 + C_5^3 + \dots + C_{2n-1}^n} = 2$; b) $\frac{C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot \dots \cdot C_{2n}^n}{C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot \dots \cdot C_{2n-1}^n} = 2^n$;

c) $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$.

32. Să se calculeze:

a) $C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_n^2$; b) $(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + \dots + (C_n^2)^2$.

33. Să se arate că dacă N_r este suma tuturor produselor de r factori luați dintre numerele 1, 2, ..., n , atunci $1 + N_1 + N_2 + \dots + N_{n-1} = n \cdot n!$.

34. Fie M o mulțime cu n elemente. Să se calculeze:

a) $\text{card} \{(X, Y) \mid X, Y \subset M \text{ și } X \cup Y = M\}$;

b) $\text{card} \{(X, Y) \mid X, Y \subset M \text{ și } X \cap Y = \emptyset\}$.

35. Să se arate că $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot k! (2n-k)! = \frac{(2n+1)!}{n+1}$, unde n și k sunt

numere naturale cu $k \leq 2n$.

36. Dacă $S_k = 1!(1+1^2) + 2!(1+2^2) + \dots + k!(1+k^2)$, să se arate că

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)S_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)S_2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)S_n = (n+2)! - 2.$$

37. Să se dezvolte, după formula lui Newton, binoamele la putere:

a) $(x+a)^7$; b) $(x^2 - 2y)^6$; c) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^7$; d) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^6$;

e) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2}{y}}\right)^5$; f) $(a + \sqrt{a^2 - 1})^6 + (a - \sqrt{a^2 - 1})^6$;

g) $(1 + \sqrt{a})^7 - (1 - \sqrt{a})^7$; h) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^5 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^5$.

38. Să se determine:

a) termenul al optulea al dezvoltării $(2x+a)^{10}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^9$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\frac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{14}$;

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^{13}$.

39. Să se determine:

- a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + \sqrt{a})^{14}$ care îl conține pe x^6 ;
- b) termenul din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2})^{15}$ care îl conține pe y^2 ;
- c) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b} + \frac{b}{\sqrt[4]{a}}\right)^{22}$ care conține pe $\frac{1}{a^2}$;
- d) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ care nu conține pe a ;
- e) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{20}$ în care nu apare x .

40. Să se determine rangul termenului din dezvoltarea:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}\right)^{43} \quad \text{în care } x \text{ și } y \text{ au puteri egale.}$$

41. Să se determine n , dacă în dezvoltarea $(a + x)^n$ coeficientul lui x^5 este egal cu coeficientul lui x^{10} .

42. Să se determine n , dacă coeficientul binomial al termenului de rang trei, al dezvoltării $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{a}}\right)^n$, este egal cu 190.

43. Să se determine n , dacă suma coeficienților termenilor, care au rangul doi, trei și respectiv patru, ai dezvoltării $(x^{-1} - \sqrt{x})^n$ este egală cu 41.

44. În dezvoltarea $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este 121. Să se găsească termenul în care nu apare x .

45. Să se găsească termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$, dacă coeficientul termenului al treilea este 28.

46. Să se determine x , dacă termenul al treilea al dezvoltării $(x + x^{\lg x})^5$ este 10^6 , logaritmul fiind în baza 10.

47. Să se determine m , natural, astfel încât al zecelea termen al dezvoltării $(5 + m)^m$ să fie cel mai mare.

48. Să se determine n și x dacă, în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienților primilor trei termeni este egală cu 22, iar suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este 420.

49. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{1+\lg x}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, logaritmul fiind în baza 10.

Să se afle x , știind că al patrulea termen al dezvoltării este egal cu 200.

50. Să se determine termenul care conține pe $x^{\frac{2}{3}}$ în dezvoltarea $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali este egală cu 128.

51. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 256. Să se găsească termenul care conține $\frac{1}{a}$.

52. Să se găsească termenii raționali ai dezvoltărilor următoare:

a) $(\sqrt[5]{2} - \sqrt[7]{3})^{24}$; b) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^{10}$

53. Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{200}$.

54. Să se găsească termenii iraționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

55. Să se determine m, n, p astfel încât în dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$ termenii de rang 12 și 24 să conțină pe x , respectiv pe x^5 și, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

56. Să se găsească numărul total al termenilor dezvoltării $(x + y)^{2n+1} + (x - y)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, după ce se efectuează reducerile de termeni posibile.

57. Fie a și b numere întregi nenule ($b > 0$) prime între ele, astfel încât $\sqrt[7]{a}$ și $\sqrt[14]{b}$ să fie iraționale. Fără a efectua dezvoltarea binomului $(\sqrt[7]{a} + \sqrt[14]{b})^{77}$, să se găsească numărul termenilor raționali ai acesteia.

58. Să se determine coeficientul termenului, care conține x^3 în produsul dezvoltărilor $(1+x)^7(1-x)^4$.

59. Să se găsească suma coeficienților dezvoltărilor:

a) $(9x^4 - 8y^3)^{19}$; b) $(8x^2 - 6y^3)^8$.

60. Să se găsească suma coeficienților dezvoltării $(9x - 8y)^n$.

61. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltările:

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^{100}$.

62. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ este natural.

63. Să se determine numărul de termeni care trebuie luați în dezvoltarea $(1 + 10^{-2})^{10}$ pentru a se defini numărul $(1 + 10^{-2})^{10}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3} , respectiv 10^{-4} .

64. Să se arate că $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k} (-3)^k = 2^{6n}$.

65. Să se demonstreze că:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$.

66. Să se demonstreze că:

a) $1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \dots = (-1)^n 2^n \cos \frac{2n\pi}{3}$;

b) $C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - \dots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$.

67. Să se demonstreze că:

a) $C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \dots = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{n\pi}{6}$.

68. Să se demonstreze că :

a) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right)$;

b) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$;

$$c) C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right);$$

$$d) C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

69. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 2$ și $|x| \leq 1$, avem $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2$.

70. Să se calculeze următoarele sume:

- a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$; b) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$;
c) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \dots + (n-1)C_n^n$; d) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (2n+1)C_n^n$;
e) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \dots + (-1)^n (n+1)C_n^n$;
f) $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \dots + (4n-1)C_n^n$;
g) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n$; h) $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$;
i) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2}$; j) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$.

71. Să se calculeze următoarele sume:

- a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^m C_n^m$; b) $C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + \dots + C_{n+m}^k$;
c) $C_n^0 + C_n^k + C_n^{2k} + \dots$; d) $C_n^m + C_n^{m+k} + C_n^{m+2k} + \dots$.

72. Să se calculeze următoarele sume:

- a) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$;
b) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots + (-1)^n (C_n^n)^2$;
c) $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$;
d) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n$;
e) $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$.

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului, cu termenul al n -lea dat de formula:

a) $a_n = 5n - 2$; b) $b_n = n^2 - 3$; c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}$;

d) $y_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^n n$; e) $z_n = \frac{2n}{3n+1}$;

f) $c_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{(-1)^{n+1}}$; g) $a_n = \frac{1 + (-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n -lea ($n \geq 1$) pentru fiecare din șirurile:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$; b) $0; 0,01; 0,0101; \dots$;

c) $\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}, \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}, \dots$; d) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \dots$; e) $\frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{11}{17}, \dots$

3. Șirul (x_n) , $n \geq 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 3n^2 - 2$.

Să se decidă dacă este termen al acestui șir numărul:

a) 190; b) 241; c) 3725; d) 15985.

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului (a_n) , definit prin:

a) $a_1 = \alpha, a_{n+1} = a_n + \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$; b) $a_1 = \beta_1, a_{n+1} = 2a_n, \beta \in \mathbf{R}$; c) $a_1 = \gamma, a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \gamma \in \mathbf{R}$; d) $a_1 = \alpha, a_2 = \beta, a_{n+2} = \alpha a_n - \beta a_{n+1}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$; e) $a_1 = \alpha,$

$a_2 = \beta, a_{n+2} = \beta a_n + \alpha a_{n+1}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

5. Fie șirul de numere (a_n) , unde $a_0 = 2, a_1 = 3$, și pentru orice număr natural k , avem: $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$. Să se demonstreze că $a_n = 2^n + 1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

6. Fie șirul de numere reale (a_n) , unde $a_1 = 1, a_2 = 4$ și pentru orice număr natural k , avem $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2$. Să se găsească formula termenului general.

7. Fie șirul de numere (b_n) astfel încât $b_1 = 1$ și $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{n(n+1)}$.

Să se găsească formula care definește termenul general.

8. a) Să se determine termenii negativi ai șirului (x_n) , definit prin:

$$x_n = C_{n-5}^n - \frac{195}{16} \cdot \frac{C_{n+3}^n}{n+1}, n \geq 1;$$

b) Să se determine termenii pozitivi ai șirului (x_n) , definit prin:

$$x_n = \frac{195}{4n!} - \frac{A_{n+3}^3}{(n+1)!}, n \geq 1.$$

9. Fie șirul (x_n) , definit astfel: $x_1 = 1$ și $x_{k+1} = (k+1)x_k$. Să se demonstreze că oricare ar fi n , avem $x_n = n!$.

10. Fie șirul (x_n) , definit prin: $x_1 = \frac{2}{3}$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Să se găsească formula care definește termenul general.

11. Fie α, β numere reale cu $\alpha \neq \beta$. Se definește (c_n) astfel încât:

$$c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \text{ și pt. fiecare } k \geq 2, c_k = (\alpha + \beta)c_{k-1} - \alpha\beta c_{k-2}.$$

Să se arate că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

12. Fie α, β numere reale, astfel încât $\alpha \neq \beta$ și $\alpha\beta \neq 1$. Se definește șirul (a_n) astfel încât $a_2 = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta) - 1}$, iar pentru fiecare $k \geq 3$,

$$a_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{a_k}. \text{ Să se demonstreze că pentru orice } n \geq 2, \text{ avem}$$

$$a_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}.$$

13. Fie S_n suma primilor n termeni ai șirului

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \dots$$

a) Să se găsească o formulă pentru S_n .

b) Să se arate că $S_{p+q} - S_{p-q} = pq$, unde p și q sunt numere naturale cu $p > q$.

14. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei aritmetice (a_n) , dacă:

a) $a_1 = 2, r = -3$; b) $a_{10} = 131, r = 12$; c) $a_5 = 27, a_{27} = 60$; d) $a_3 = 11, a_5 = 19$. Să se dea apoi formula termenului al n -lea.

15. Să se găsească termenii a_1, a_3, a_5, a_6 ai progresiei aritmetice următoare: $a_1, -7, a_3, -1, a_5, a_6, 8, \dots$

16. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice (a_n) , dacă $a_5 = \frac{\alpha}{3}$ și $r = \frac{10\alpha}{3}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

17. Fie (x_n) o progresie aritmetică, astfel încât $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ și $r = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Să se determine n , știind că $x_n = 4\alpha + 3\beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$).

18. Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice (a_n) , dacă:

$$\text{a) } \begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7, \\ a_8 - a_7 = 2a_4; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 120, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 15; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12, \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18. \end{cases}$$

19. Să se găsească suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n) , dacă:

$$\text{a) } a_1 = 2, a_5 = 14; \text{ b) } a_{10} = 50, r = 7.$$

20. Șirul (y_n) este dat prin formula termenului al n -lea: $y_n = \alpha n + \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că șirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

21. Să se decidă dacă este progresie aritmetică un șir astfel încât pentru orice n , suma primilor n termeni este dată de formula $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. În caz afirmativ, să se găsească formula termenului general.

22. Să se determine termenul al n -lea al unei progresii aritmetice (a_n) , dacă $a_1 = \alpha$ și $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$.

23. Să se demonstreze că, oricare ar fi trei termeni consecutivi ai șirului (a_n) , dat prin formula termenului general următoare, nu sunt în progresie aritmetică:

$$\text{a) } a_n = n^2; \text{ b) } a_n = \sqrt{n}; \text{ c) } a_n = \frac{1}{n}.$$

24. Fie (a_n) o progresie aritmetică. Să se studieze dacă este progresie aritmetică șirul (b_n) al cărui termen general este dat de formula următoare:

a) $b_n = \alpha a_n$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $b_n = a_{2n}$; c) $b_n = a_n + \alpha$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$;

d) $b_n = \frac{\alpha}{a_n}$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; e) $b_n = a_n^2$.

25. Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, numerele $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ sunt în progresie aritmetică.

26. Să se arate că dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt în progresie aritmetică, atunci ele sunt proporționale cu numerele 3, 4, 5.

27. Să se determine suma primilor n termeni ai șirului:

a) 1, -2, 3, -4, ... ; b) 1, -3, 5, -7,

28. Să se găsească termenul general al șirului 2, 4, 7, 11, ... care are proprietatea că diferențele între termenii vecini formează o progresie aritmetică.

29. Fie a, b, c, d numere reale nenule, astfel încât: $a^3 \sqrt{\frac{a^2}{bcd}}$, $b^3 \sqrt{\frac{b^2}{acd}}$, $c^3 \sqrt{\frac{c^2}{abd}}$, $d^3 \sqrt{\frac{d^2}{abc}}$ sunt în progresie aritmetică. Să se arate că a^2, b^2, c^2, d^2 sunt în progresie aritmetică.

30. Dacă α, β, γ sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, să se arate că $\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta, \operatorname{ctg} \gamma$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $\cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma$ sunt în progresie aritmetică.

31. Se dă binomul $(a + b)^m$, unde $a = \sqrt{2^{\lg(10^{-3^x})}}$ și $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$, logaritmul fiind în baza 10. Să se determine x , știind că termenul dezvoltării care conține pe b^5 este 21, iar coeficienții binomiali ai celui de-al doilea, al treilea și al patrulea termen al dezvoltării binomului sunt în progresie aritmetică.

32. Să se găsească toate valorile reale ale lui a , nenule, astfel încât ecuația $x^8 + ax^4 + a^4 = 0$ să aibă exact patru rădăcini reale, care să fie în progresie aritmetică.

33. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n) , dacă:

a) $b_1 = 3, q = -2$; b) $b_8 = 384, q = 2$; c) $b_6 = 25, b_8 = 9$; d) $b_3 = 20, b_9 = 1280$.

34. Să se găsească termenii b_2, b_3, b_5, b_6 ai progresiei geometrice următoare: $\sqrt{2}, b_2, b_3, 12\sqrt{3}, b_5, b_6, 216\sqrt{2}, \dots$.

35. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii geometrice (a_n) , dacă:

$$\text{a) } \begin{cases} a_5 - a_1 = 15, \\ a_4 - a_2 = 6; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} a_5 + a_2 - a_4 = -159, \\ a_4 + a_1 - a_3 = 265. \end{cases}$$

36. Să se decidă dacă este progresie geometrică un șir astfel încât pentru orice n , suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

$$\text{a) } S_n = n^2 + 1; \text{ b) } S_n = 4^n - 1; \text{ c) } S_n = 5^n - 5.$$

37. Fie (b_n) o progresie geometrică. Să se studieze dacă este progresie geometrică șirul (c_n) , al cărui termen general este dat de formula următoare:

$$\text{a) } c_n = \beta b_n, \text{ cu } \beta \in \mathbf{R}; \text{ b) } c_n = b_{2n}; \text{ c) } c_n = b_n + \beta, \text{ cu } \beta \in \mathbf{R};$$

$$\text{d) } c_n = \frac{\beta}{b_n}, \text{ cu } \beta \in \mathbf{R}; \text{ e) } c_n = b_n^3.$$

38. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, cu $|a| \neq |b|$, să se arate că numerele $(a + b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a - b)^2$ sunt în progresie geometrică.

39. Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ sunt în progresie geometrică, atunci $(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$.

40. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3$. Să se arate că numerele x, y, z sunt în progresie geometrică.

41. Să se calculeze suma

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + 100 \cdot 2^{99}.$$

42. Să se demonstreze că

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1})$$

43. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă numerele ab, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci numerele $b, c, 2b - a$ sunt în progresie geometrică.

44. Să se găsească suma $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots 3}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

45. Fie (a_n) o progresie aritmetică, iar (b_n) o progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încât $a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

Să se demonstreze că $a_n \leq b_n$, pentru orice n .

46. Fie a_1, a_2, a_3 și b_1, b_2, b_3 câte trei numere în progresie aritmetică (respectiv geometrică), astfel încât $b_1 \neq b_2$ și $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$.

Să se arate că, dacă a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 sunt în progresie aritmetică, atunci $a_1 = b_2$ (respectiv $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$).

47. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 în progresie geometrică, astfel încât suma logaritmilor, în baza 3, a acestor numere să fie egală cu 2. Să se găsească aceste numere, știind că $\log_3\left(\frac{a_5}{a_3}\right) = -2$.

48. Să se găsească suma tuturor numerelor naturale, mai mici sau egale cu 1000 și care nu se divid cu 13.

49. Suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice este egală cu 62. Dacă termenii: al cincilea, al optulea și al unsprezecelea, ai acestei progresii sunt respectiv primul, al doilea și al zecelea termen pentru o progresie aritmetică, să se găsească primul termen al progresiei geometrice.

50. Fie numerele reale distincte a, b, c cu $a + b + c = 124$, astfel încât acestea să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Dacă presupunem, în plus, că a, b, c sunt, respectiv al treilea, al treisprezecelea și al cincisprezecelea termen pentru o progresie aritmetică, să se determine numerele a, b, c .

51. Suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 130. Dacă presupunem, în plus, că termenii: al patrulea, al zecelea și al șaptelea ai acestei progresii sunt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, să se determine primul termen al progresiei aritmetice.

52. Să se arate că:

a) Numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi toate printre termenii unei progresii aritmetice.

b) Numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi toate printre termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi.

53. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere pozitive în progresie geometrică, să se arate că $a_1a_2 \dots a_n = \sqrt{(a_1a_n)^n}$.

54. Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr real. Să se arate că există $b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât b să fie media aritmetică între a și c , c să fie media geometrică între a și b și a să fie media armonică (a se vedea ex. 33, cap. IV) între b și c .

55. Fie a_1, a_2, \dots, a_{2n} , un număr par de numere reale în progresie geometrică, astfel încât suma lor să fie de cinci ori mai mare decât suma termenilor de rang par. Să se găsească rația progresiei.

56. Fie (a_n) o progresie aritmetică și (b_n) o progresie geometrică, astfel încât:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 155, b_1 + b_2 = 9.$$

Să se determine progresiile, dacă a_1 este rația progresiei geometrice, iar b_1 este rația progresiei aritmetice.

57. Fie (a_n) o progresie aritmetică și (b_n) o progresie geometrică astfel încât:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3 - 8. \text{ Să se determine progresiile.}$$

58. Fie (a_n) o progresie aritmetică cu termeni pozitivi, astfel încât $a_2 = \sqrt{a_1 a_4}$. Să se demonstreze că a_4, a_6, a_9 sunt în progresie geometrică. Să se determine rația.

59. Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}$ în progresie geometrică descrescătoare. Să se demonstreze că:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \dots \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}.$$

60. După o povestire orientală, inventatorul jocului de șah solicitând recompensa s-a adresat suveranului său astfel: „Eu doresc pentru prima căsuță un bob de grâu, pentru a doua 2 boabe de grâu, pentru a treia 2^2 boabe de grâu ș.a.m.d., pentru a 64-a doresc 2^{63} boabe de grâu“. Să se calculeze numărul boabelor de grâu cerute suveranului.

61. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale, primul având termenii în progresie aritmetică, iar al doilea în progresie geometrică. Să se arate că, dacă cele două șiruri conțin câte un termen irațional, atunci ele au o infinitate de termeni iraționali.

62. Să se arate că în triunghiul lui Pascal, suma termenilor fiecărei linii este dublul sumei termenilor liniei precedente. Să se afle suma termenilor unui triunghi al lui Pascal cu 64 de linii.

63. Dacă $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$, să se găsească sumele:

$$\text{I) } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)^2;$$

$$\text{II) } \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n - \frac{1}{a^n}\right)^2.$$

64. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive.

a) Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie aritmetică, să se calculeze

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}.$$

b) Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie geometrică, să se calculeze

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}.$$

65. Fie numerele pozitive a_1, a_2, \dots, a_n , în progresie geometrică crescătoare și p un număr natural nenul. Să se arate că raportul sumelor

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p} \text{ și}$$

$$S_n' = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p} \text{ nu depinde de } n.$$

66. Un șir de numere $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este astfel încât, oricare ar fi k , avem: $a_1 + a_2 + \dots + a_k = ak^2 + bk$, unde a, b sunt numere reale date. Să se demonstreze că acest șir este o progresie aritmetică. Să se deducă în funcție de a și b primul termen și rația acesteia.

67. Să se arate că dacă n și k sunt numere naturale cu $n \geq k + 3$, atunci $C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

68. Să se găsească termenul general al șirului (a_n) , definit prin:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ și pentru orice } n \geq 2 \text{ avem } \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 2^n a_n.$$

69. Fie numerele a_1, a_2, \dots, a_n în progresie aritmetică, cu rația r , și fie $S_m = a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$, unde $m \in \mathbb{N}$.

a) Calculându-se diferențele $a_{k+1}^p - a_k^p$, pentru $k = 1, 2, \dots, n$, să se demonstreze că $a_{n+1}^p - a_1^p = C_p^1 r S_{p-1} + C_p^2 r^2 S_{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} S_1 + C_p^p r S_0$, oricare ar fi $p \geq 1$, număr natural.

b) Reciproc, dacă egalitatea de mai înainte este adevărată pentru orice p și n , atunci numerele a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie aritmetică cu rația r .

70. Se formează numerele b_1, b_2, \dots, b_n , definite prin relația de

recurență: $b_n = \alpha b_{n-1} + \beta$, unde b_1, α, β sunt numere reale date.

a) Presupunem că $\alpha \neq 1$ și fie q rădăcina ecuației $x = \alpha x + \beta$. Să se demonstreze că numerele: $b_1 - q, b_2 - q, \dots, b_n - q$ sunt în progresie geometrică. Să se deducă, de aici, expresia lui b_n în funcție de n .

b) Să se deducă o formulă pentru suma $b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Să se examineze cazul $\alpha = 1$.

71. Să se calculeze suma $S = a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_2 a_3 a_4 \dots a_{k+1} + \dots + a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k}$, unde (a_n) este o progresie aritmetică.

72. Să se calculeze suma $S = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} + \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-1}}$, unde (a_n) este o progresie aritmetică.

73. Să se calculeze sumele:

a) $S_1 = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n$;

b) $S_2 = q + 4q^2 + 9q^3 + \dots + n^2 q^n$, q fiind un număr real.

74. Fie a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , numere în progresie aritmetică și $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$.

Să se demonstreze că $\sum_{k=0}^n C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}$.

75. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ șirul definit prin relația $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Fie $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ ($a_1, a_2 \in \mathbf{R}$) și r_1, r_2 rădăcinile ecuației $r^2 = ar + b$. Dacă $r_1 \neq r_2$, atunci x_n este de forma $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$, iar dacă $r_1 = r_2 = r$, atunci x_n este de forma $x_n = Ar^n + Bnr^{n-1}$, unde A și B sunt numere reale.

Capitolul XII

NOȚIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Folosind algoritmul lui Euclid să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor: a) 63; 1971; b) 285; 322; c) -10; 55; d) -72; -88; e) -45; 525; f) 720; 2860; g) 4410; 3675.

2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 160; 120; b) 180; 240; c) 1250; 200; d) 1620; 584.

3. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 5 care împărțit prin 6, 8, 9, 12 și 16 să dea același rest 5.

4. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 6 care împărțit prin 8, 12, 20 și 30 să dea același rest 6.

5. Să se determine numerele naturale a și b astfel încât $a + b = 60$ și cel mai mare divizor comun al lor este 12.

6. Să se determine numerele naturale a și b astfel încât cel mai mare divizor comun este 6 și cel mai mic multiplu comun este 216.

7. Să se determine numerele naturale a și b ($a > b$) astfel încât $a^2 - b^2 = 2880$ și cel mai mare divizor comun al lui a și b este 8.

8. Care este ultima cifră a numerelor: 323^{700} , 1244^{51} , 1982^{83} , 164^{41} , 194^{53} , $17^{60} + 12^{40}$, $13^{20} + 22^{30}$?

9. Care este restul împărțirii numerelor:

a) $19^{42} \times 23^{51}$ prin 7; b) $17^{36} \times 21^{41}$ prin 5?

10. Care este ultima cifră a numărului 7^{7^7} ?

11. Dacă $n \geq 5$, atunci ultima cifră a numărului $1! + 2! + \dots + n!$ este egală cu 3. Să se deducă de aici că numărul $1! + 2! + \dots + n!$ pentru $n \geq 4$ nu este pătrat perfect.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că restul împărțirii lui n^3 prin 7 este 0 sau 1 sau 6.

13. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine restul împărțirii lui $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ prin 4.

14. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, fracțiile: a) $\frac{5n+3}{8n+5}$, b) $\frac{33n+4}{22n+3}$ sunt ireductibile.

15. Fie $n, a, b \in \mathbb{N}$. Dacă $5a - 21b = \pm 1$, atunci fracția $\frac{21n+a}{5n+b}$ este ireductibilă.

16. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor $5a + 17b$ și $2a + 7b$ este egal cu cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

17. Fie a și b două numere prime. Să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor: $a + b$ și $a - b$.

18. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se arate că: $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ și $7 \mid b$.

19. Să se demonstreze că dacă $n \geq 2$ atunci 3 nu divide numărul $C_n^2 + 1$.

20. Dacă $n \geq 2$, să se arate că 3 divide numărul C_n^2 .

21. Să se arate că numărul $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ se divide prin 10 dacă n este impar.

22. Să se arate că: $6 \mid n^3 - n$, $30 \mid n^5 - n$, $42 \mid n^7 - n$, $6 \mid n^3 + 11n$, $60 \mid n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$, $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$, $6 \mid n(2n + 1)(7n + 1)$, $24 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

23. Fie m și n numere naturale. Să se arate că $m!n!$ divide $(m + n)!$.

24. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $5 \mid n^2 - 3n + 6$.

25. Să se arate că numărul $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

26. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $7 \mid n^3 + n - 2$.

27. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $7 \mid 2^{2n} + 2^n + 1$.

28. Să se arate că: $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $11 \mid 3^{2n} + 2^{6n-5}$.

29. Să se arate că: $5 \mid 17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

30. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, să se arate că: $170 \mid 153^n + 45^n - 28^n$.

31. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că: $7 \mid 2^n - 1 \Leftrightarrow 3 \mid n$.

32. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că 7 nu divide pe $2^n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

33. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât: $11 \mid 3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

34. Să se arate că dacă n este un număr natural, atunci: $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.

35. Dacă p este un număr prim, să se arate că: $p \mid C_p^k$, pentru orice $0 < k < p$.

36. Dacă p este un număr prim, să se arate că: $p \mid 2^p - 2$.

37. Dacă numărul $a^k - 1$ ($a \in \mathbb{Z}$ și $k > 1$) este prim, atunci $a = 2$ și k este număr prim.

38. Dacă numărul $a^n + 1$ este prim ($a > 1$ și $n > 1$, $a \in \mathbb{N}$), atunci a este par și n este de forma 2^m .

39. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul $3n^2 - 1$ nu se divide nici cu 3, nici cu 5 și nici cu 7.

40. Fie a, b două numere naturale nenule. Dacă $a \mid b^2$, $b^2 \mid a^3$, $a^3 \mid b^4$, $b^4 \mid a^5$, ... atunci $a = b$.

41. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sunt de forma $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

42. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sunt de forma $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

43. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci numărul $E = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ este un pătrat perfect.

44. Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Dacă $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, atunci m și n sunt pătrate perfecte.

45. Dacă p este un număr prim, $p \geq 5$, atunci restul împărțirii lui p^2 prin 12 este 1.

46. Dacă p și $8p^2 + 1$ sunt numere prime, atunci $8p^2 - 1$ este de asemenea număr prim.

47. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x + y = xy$.

48. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

49. Să se arate că nu există numerele întregi $x > 0$ și $y > 0$ astfel încât să avem egalitatea: $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$.

50. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația:
 $5x + 7y^2 = 1600$.

51. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x = 4\left[\sqrt{x}\right] + 1$.

52. Să se afle valorile numărului $n \in \mathbb{N}$ astfel încât 12 să dividă pe $n^4 - n^2 - 24$.

53. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dacă există două numere prime distincte care îl divid pe n , atunci cel mai mare divizor comun al numerelor: $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ este 1.

54. Fie p un număr natural și $n = p^m$ ($m > 0$). Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor: $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ este p .

55. Care sunt ultimele două cifre ale numărului 2^{999} ?

56. Să se arate că suma a n numere naturale impare consecutive nu este un număr prim ($n > 1$).

57. Dacă $n > 0$ este un număr natural, numărul $n^4 + n^2 + 1$ poate fi prim?

58. Să se demonstreze că numărul $2^{2^n} - 1$ are în descompunerea sa în factori primi cel puțin n numere prime distincte.

59. Fie $n \geq 1$ un număr natural având descompunerea sa în factori primi $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ unde p_1, p_2, \dots, p_n sunt numere prime distincte. Să se arate că numărul divizorilor (pozitivi) ai lui n este $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$.

60. Să se arate că orice număr de n cifre ($n > 1$) este mai mare decât produsul cifrelor sale.

61. Din șirul de numere naturale $1, 2, 3, \dots, 2n$ se aleg $n + 1$ numere.

Să se arate că în aceste $n + 1$ numere alese există două numere astfel ca unul să îl dividă pe celălalt.

62. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Dacă $6 \mid a + b + c \Rightarrow 6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

63. Dacă m, n sunt numere naturale astfel încât $m = n + 2$, să se arate că numerele $n^4 + 4$ și $m^4 + 4$ nu sunt prime între ele.

64. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale prime între ele, atunci C_{m+n}^n este divizibil cu $m + n$.

65. La ce putere apare 2 în descompunerile lui 50! și 100!?

66. Fie m, n două numere naturale nenule. Să se arate că:
$$\pm \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n+1} \pm \frac{1}{n+2} \pm \dots \pm \frac{1}{n+m} \notin \mathbf{Z}$$
 (semnele +, respectiv - se iau oricum).

67. Să se arate că nu există pătrate perfecte de forma: $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5$, cu n număr întreg.

68. Fie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ o rearanjare oarecare a numerelor 1, 2, 3, ..., 9. Să se arate că numărul $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_9 - 9)$ este par.

69. Să se arate că dacă $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$, cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$, atunci cel puțin unul dintre numerele a, b sau c este divizibil cu 3.

70. Să se arate că există o infinitate de numere întregi n astfel încât $4n^2 + 1$ să fie divizibil cu 5 și cu 13.

71. Se dau 51 de numere naturale cuprinse între 1 și 100. Să se arate că există printre acestea, două cu proprietatea că unul îl divide pe celălalt.

72. Fiind date $2^{n+1} - 1$ numere întregi, să se arate că există 2^n dintre acestea cu suma divizibilă cu 2^n .

73. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, există o infinitate de numere întregi având exact $2n$ divizori.

74. Să se arate că un număr întreg n are $4m + 2$ divizori întregi ($m \in \mathbf{N}$) dacă și numai dacă $|n|$ este un pătrat perfect.

75. Fie n un număr prim care scris în baza 10 are toate cifrele egale cu 1. Să se arate că numărul cifrelor sale este tot un număr prim. Este adevărată reciproca?

76. Să se arate că oricare ar fi un număr natural n , există n numere întregi consecutive care să aibă fiecare cel puțin 2 divizori primi distincți.

77. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, m, n , cu $m, n > 0$, avem: $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m, n)} - 1$.

78. Să se arate că între numerele n și $n!$ există cel puțin un număr prim ($n \geq 2$).

79. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$, atunci a și b sunt cuburi perfecte.

80. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului 2^{30} .

81. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $39^{30} - 38^{30}$.

82. Să se determine toate soluțiile întregi ale ecuației

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(3x + \sqrt{9x^2 + 224x + 1416} \right) \right] = 1.$$

83. Să se arate că, dacă a și b sunt numere prime între ele, atunci oricare ar fi $n > ab$, există x și y numere naturale astfel încât $n = ax + by$.

84. Să se arate că, dacă $m, n \in \mathbb{N}$ și m este impar, atunci $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

Capitolul XIII

POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI.

ECUAȚII ALGEBRICE

1. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă:

- | | |
|---|----------------------|
| a) $f = X^5 - X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 4$, | $g = X^2 - X + 3$; |
| b) $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 1$, | $g = X^3 - X + 1$; |
| c) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 15X + 3$, | $g = X^2 + X + 1$; |
| d) $f = X^8 - 3X^6 + 5X^4 - 2X^2 + 1$, | $g = X^3 - 4X + 1$. |

2. Aplicând schema lui Horner să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g .

- | | |
|---|----------------|
| a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 7X + 9$, | $g = X - 1$; |
| b) $f = 3X^5 - 4X^4 + 7X^3 + X + 3$, | $g = X - 2$; |
| c) $f = -2X^6 + 8X^5 - 5X^4 + 3X + 7$, | $g = X + 3$; |
| d) $f = 4X^3 + 6X^2 - 7X + 9$, | $g = 2X + 1$. |

3. Să se determine un polinom ce gradul doi $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ astfel încât: $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 9$.

4. Să se determine în raport cu parametrul m , gradul polinomului $f = (m^2 + 3m + 2)X^4 + (m^3 + 2m^2 - m - 2)X^3 + (m^2 + 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 1$.

5. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 6$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}$.

6. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1$. Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$.

7. Fie polinomul $f = X^3 - 3X + 5$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$.

8. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 8$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}$.

9. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți numere întregi.

I) Să se arate că dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $f(a)$ divide numărul $f(a) + f(a)$.

II) Să se arate că există un număr $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a)$ să nu fie un număr prim.

10. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât să fie îndeplinită condiția: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

11. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul $f = X^4 + mX^3 + 2X^2 - 8$ împărțit la $X - 2$ să dea restul 4.

12. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul $f = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$ împărțit la $X - 1$ să dea restul 5.

13. Să se afle polinomul de gradul cel mai mic astfel încât împărțit la $X + 1$ să dea restul 2 și împărțit la $X - 1$ să dea restul -3.

14. Să se arate că restul împărțirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)$, unde $b \neq a$, este $r = \frac{(X-a)f(b) - (X-b)f(a)}{b-a}$.

15. Să se arate că restul împărțirii polinomului cu coeficienți reali $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ prin $X^2 + 1$ este polinomul $r = g(-1) + h(-1)X$ unde $g = a_0 + a_2X + a_4X^2 + a_6X^3 + a_8X^4 + \dots$, iar $h = a_1 + a_3X + a_5X^2 + a_7X^3 + \dots$.

16. Să se determine parametrul m astfel ca polinomul $X^4 + 4X^3 - X^2 + 6X - m$ să se dividă prin $X + 2$.

17. Să se arate că polinomul $X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 5X - 3$ se divide la $X - 1$; se cere câtul împărțirii.

18. Dacă n este un număr par, să se arate că $X + 1$ divide polinomul $(X - 1)^n - (X + 3)^n$, dar $(X + 1)^2$ nu divide pe $(X - 1)^n - (X + 3)^n$.

19. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

20. Să se arate că polinomul $nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

21. Să se arate că polinomul $X^{n+1} - X^{n+2} - 3X + 3$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

22. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n+3}$.

23. Să se arate că $X^2 + X + 1$ divide polinomul $X^{6n-1} + X + 1$.

24. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(X^4 - X - 1)^{2n+2} + (X^4 + X - 1)^{2n+5}$.

25. Să se arate că polinomul $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 - 1$.

26. Să se arate că polinomul $X^{5a_1} + X^{5a_2+1} + X^{5a_3+2} + X^{5a_4+3} + X^{5a_5+4}$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 fiind numere naturale, este divizibil prin $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

27. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

28. Să se arate că polinomul $(X - 1)^{n+3} + X^{2n+3}$ se divide la $(X^2 - X + 1)$.

29. Să se determine un polinom f de gradul cinci știind că $f + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$ iar $f - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.

30. Pentru ce valori ale lui m , polinomul $(X - 1)^m - X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

31. Pentru ce valori ale lui m , polinomul $(X - 1)^m + X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

32. Fie polinomul $f(x) = X^{2n} + X^n + 1 \in \mathbb{R}[X]$ unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $f(x)$ se divide cu $X^2 - X + 1$ dacă și numai dacă $n = 6q + 2$ sau $n = 6q + 4$ cu $q \in \mathbb{N}$.

b) dacă $f(x)$ se divide cu $X^2 - X + 1$, atunci $f(x)$ se divide și cu $X^2 + X + 1$.

33. Să se arate că polinomul $X^{1993} + X^2 + 1$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$ și să se calculeze câtul.

34. Fie polinomul $f(x) = (X + 1)^m - (X + 1)^n \in \mathbb{R}[X]$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că polinomul $f(x)$ se divide prin $X^2 + X + 1$ dacă și numai dacă $m - n$ se divide cu 6.

35. Să se determine condiția îndeplinită de $m, n \in \mathbb{N}$, pentru care $f(x) = (X - 1)^m - (X + 4)^n$ se divide cu $X^2 - X + 5$.

36. Să se determine polinoamele cu coeficienți reali care satisfac relația: $XP(X - 1) = (X - 26)P(X)$.

37. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât: $Xf(X) = (X - 3)f(X + 1)$.

38. Să se arate că nu există nici un polinom nenul $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât: $(X - 1)f(X) = (X + 1)f(X + 1)$.

39. Există polinoame nenule $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât: $X^2f(X) = (X - 1)^3f(X + 1)$?

40. Să se găsească un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât: $X^kf(X) = (X - 3)^kf(X + 1)$,

$k \geq 1$.

41. Să se determine $P(X) \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $P(0) = 0$ și $P(x^2 + x + 1) = P(x)^2 + P(x) + 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

42. Fie $f(X)$ un polinom de gradul doi cu coeficienți raționali. Atunci $f(n) \in \mathbf{Z}$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ dacă și numai dacă $f(X)$ este de forma

$$f(X) = \frac{1}{2} [cX^2 + (2b - c)X + 2a], \text{ cu } a, b, c \in \mathbf{Z}.$$

43. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor, cu ajutorul algoritmului lui Euclid:

a) $f = 6X^6 - X^5 - 6X^4 + 4X^3 + 8X^2 - 7X + 2$, $g = 2X^5 - X^4 - 10X^3 + 15X^2 - 9X + 2$;

b) $f = 5X^7 - 10X^6 + 8X^5 - 16X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 2$, $g = 5X^5 - 9X^4 - 2X^3 + 2X - 4$;

c) $f = 10X^7 + 35X^5 - 13X^4 + 15X^3 - 14X^2 + 3X$, $g = X^5 + 2X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 4X - 2$;

d) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 22X + 14$, $g = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 2X$;

e) $f = 2X^6 + 5X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 5X + 3$, $g = 2X^5 + 5X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 5X - 3$.

44. Să se arate că următoarele polinoame sunt prime între ele:

a) $f = X^4 + X^3 + 3X^2 + 7X + 20$, $g = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 20$;

b) $f = X^5 - 6X^4 + 8X^3 + X^2 - 6X + 8$, $g = X^4 + 7X^3 + 18X^2 + 22X + 12$.

45. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n - 1$ și $X^m - 1$.

46. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n + a^n$ și $X^m + a^m$.

47. Să se descompună în factori, cu coeficienți reali, polinoamele:

a) $f = X^4 - 1$; b) $f = X^6 - 1$; c) $f = X^8 - 1$.

48. Este bijectivă funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 5x + 1$?

49. Să se descompună în factori, cu coeficienți reali, polinomul $f = X^{2n} - 1$.

50. Să se rezolve ecuațiile, știind că între rădăcini există relațiile:

a) $4x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 26x + 12 = 0$,

$$x_1 = 2x_2;$$

b) $2x^3 - 9x^2 - mx + 75 = 0$,

$$x_1 = 2x_2;$$

c) $6x^3 - mx^2 + 64x + 12 = 0$,

$$x_1 = 3x_2;$$

d) $x^4 - 12x^3 - 2x^2 + mx + 297 = 0$,

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4;$$

e) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$,

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4;$$

$$f) 3x^3 - 32x^2 + 73x + 28 = 0,$$

$$x_1 - x_2 = 3;$$

$$g) 2x^4 + 2x^3 - 38x^2 + 22x + 60 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = -3;$$

$$h) x^4 + 10x^3 + mx^2 + 50x + 24 = 0,$$

$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4;$$

$$i) x^3 + 5x^2 - 2x - m = 0,$$

$$x_1 + x_2 = -7;$$

$$j) 2x^3 + x^2 - 76x + 105 = 0,$$

$$x_1 - x_2 = 12;$$

$$k) x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0,$$

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2.$$

51. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se arate că:

$$a) 12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2;$$

$$b) 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) = 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

52. Fie ecuația $x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că această ecuație are o rădăcină independentă de m .

b) Dacă x_2 și x_3 sunt celelalte două rădăcini, să se determine m astfel

$$\text{încât } \lg |x_2 - x_3| = \frac{1}{2} \lg (6m + 5).$$

53. Fie ecuația: $4ax^4 - 2(a^2 + a + 1)x^3 + (a^2 - 16a + 1)x^2 + 8(a^2 + a + 1)x - 4(1 + a^2) = 0$.

a) Să se arate că ecuația are trei rădăcini raționale independente de a .

b) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației, să se determine a astfel

$$\text{încât: } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{11}{2}.$$

54. Fie ecuația $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$.

a) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, ecuația are o rădăcină ce aparține intervalului $[-1, 1]$.

b) Să se determine m știind că ecuația are o rădăcină dublă.

c) Să se determine m astfel încât $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 6$ unde x_1, x_2, x_3

sunt rădăcinile ecuației.

55. Să se arate că ecuația $x^4 - (a + 1)x^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)x^2 + bx + c = 0$,

$a, b, c \in \mathbb{R}$, are cel mult două rădăcini reale.

56. Să se arate că ecuația $x^4 + mx^3 + (2m^2 + 1)x^2 + nx + p = 0$ nu poate avea toate rădăcinile reale, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

57. Se dă polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a și b și

să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, știind că restul împărțirii lui $f(X - 1)$ la $X + 1$ este -4 și că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ satisfac relația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

58. Se dă polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$. Să se determine a și b și să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, știind că restul împărțirii lui $f(X + 1)$ la $X - 8$ este 9 și că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ satisfac relația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{13}{2}$.

59. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$. Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $e^{f(x)} \leq 1$.

60. Să se arate, prin inducție după n , că rădăcinile polinomului $f = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ sunt $1, 2, \dots, n$.

61. Să se arate că rădăcinile polinomului:

$$f = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} \text{ sunt simple.}$$

62. Să se arate prin inducție că rădăcinile ecuației $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!} = 0$, $n \in \mathbf{N}^+$ sunt $-1, -2, -3, \dots, -n$.

63. Fie ecuația $x^3 + x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine m astfel încât $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației.

64. Se consideră ecuațiile $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ și $y^3 + (b+c)y^2 + (c+a)y + a+b = 0$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3 , respectiv y_1, y_2, y_3 . Să se determine a, b, c astfel încât $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 1$.

65. Fie ecuația $x^4 + m^2x^3 + 3x + 1 = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, această ecuație are o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$.

66. Să se rezolve ecuația $x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 40x + m = 0$, știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

67. Se dă polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $E(m) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în care x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

b) Să se determine valorile parametrului m astfel încât $E(m) \geq 3(x_1x_2x_3)^2$.

c) Să se determine m astfel încât polinomul f să se dividă la $X - 1$ și

să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ în acest caz.

68. Să se arate că polinomul $f = X^4 + 12X - 5$ are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2; să se rezolve ecuația.

69. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$.

a) Să se determine n și p astfel încât $X^2 + 1$ să dividă pe f .

b) Dacă g este câtul împărțirii lui f la $X^2 + 1$, să se calculeze $g(1) + g(2) + \dots + g(n)$.

70. Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Să se determine a, b, c, d astfel încât $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^4$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

71. Să se arate că ecuația $x^3 + 3x - 2 = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$. Să se arate că celelalte două rădăcini sunt complexe.

72. Să se arate că ecuația $x^3 - 3x - 2\sqrt{2} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

73. Să se arate că ecuația $x^3 - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

74. Să se rezolve în mulțimea \mathbb{C} , ecuația $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = 0$ știind că admite o rădăcină reală.

75. Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$.

a) Să se arate că nu există valori ale lui $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca f să se dividă la $X^3 - X$.

b) În cazul când $f(0) = f(1)$, să se determine a, b, c astfel ca polinomul f să aibă rădăcina $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ și în acest caz să se determine celelalte rădăcini.

76. Să se determine m și să se rezolve ecuația $2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$, știind că are o rădăcină dublă.

77. Fie ecuația $x^3 + px^2 + 2p^2x + 3p^3 = 0$. Să se arate că $16(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^3 + 27(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 = 0$.

78. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere complexe satisfăcând condițiile: $x + y + z = 0$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, atunci există $a \in \mathbb{C}$ astfel încât $x^6 + y^6 + z^6 = ax^2y^2z^2$.

79. Să se determine a, b, c astfel ca aceste numere să fie rădăcinile ecuației $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$.

80. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $f(\alpha) \geq 0$, pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$. Atunci există două polinoame $f_1, f_2 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $f = f_1^2 + f_2^2$.

81. Fie f un polinom cu coeficienți întregi și $a \in \mathbf{Z}$. Dacă $f(a)$ și $f(a+1)$ sunt numere impare, atunci f nu are rădăcini întregi.

82. Fie f un polinom cu coeficienți întregi. Presupunem că f ia valoarea $+1$ pentru cel puțin patru numere întregi distincte. Atunci pentru orice $a \in \mathbf{Z}$, $f(a) \neq -1$. Afirmația rămâne adevărată dacă f ia valoarea $+1$ numai pentru trei numere întregi distincte?

83. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă există cel puțin patru numere întregi distincte a, b, c, d astfel încât $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 12$, atunci $f(k) \neq 17$, $(\forall) k \in \mathbf{Z}$.

84. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă există cel puțin patru numere întregi a, b, c, d distincte astfel încât $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$, să se arate că $f(k) \neq 1, 3, 5, 9, 11$, $(\forall) k \in \mathbf{Z}$.

85. Polinomul $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ are trei rădăcini întregi care dau resturi distincte prin împărțirea la 3. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{Z}$, $f(n)$ este divizibil cu 3.

86. Să se rezolve ecuațiile, știind că admit rădăcini independente de m :

a) $x^4 + mx^3 + (2m+3)x^2 + 3mx + 6m = 0, m \in \mathbf{R};$

b) $x^4 + 2x^3 + (m-1)x^2 - 2x - m = 0, m \in \mathbf{R}.$

87. Fie ecuația $x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine ecuația de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:

a) $y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}, y_2 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}, y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3};$

b) $y_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1} + 1, y_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2} + 1, y_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3} + 1;$

c) $y_1 = 1 + \frac{1}{x_1^2}, y_2 = 1 + \frac{1}{x_2^2}, y_3 = 1 + \frac{1}{x_3^2};$

d) $y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_3, y_3 = x_1 + x_2;$

e) $y_1 = x_2 x_3, y_2 = x_1 x_3, y_3 = x_1 x_2;$

f) $y_1 = \frac{1}{x_2 + x_3}, y_2 = \frac{1}{x_1 + x_3}, y_3 = \frac{1}{x_1 + x_2}.$

88. Fie ecuația $x^3 - 3x + 1 = 0$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine ecuația de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 , unde:

a) $y_1 = x_2 + x_3 + kx_1$, $y_2 = x_1 + x_3 + kx_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + kx_3$;

b) $y_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $y_2 = x_2^2 - x_1x_3$, $y_3 = x_3^2 - x_1x_2$;

c) $y_1 = x_2^2 + x_3^2$, $y_2 = x_1^2 + x_3^2$, $y_3 = x_1^2 + x_2^2$.

89. Fie ecuația $x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine ecuația care are ca rădăcini numerele y_1, y_2, y_3 date de $y_i = x_i^2 + x_i - 5$, $i = 1, 2, 3$.

90. Fie ecuația $x^3 - px + q = 0$. Să se calculeze în funcție de p și q expresia $E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_2^2}$.

91. Fie a o rădăcină a ecuației $x^3 - x - 1 = 0$. Să se găsească un polinom nenul, cu coeficienți întregi, care să admită rădăcina $b = 2a^2 - a$.

92. Fie ecuația $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$. Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației.

93. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2x^4 - x^3 + 39x^2 + 18x + 54 = 0$, dacă $x_1 = 3\sqrt{2}$;

b) $6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$, dacă $x_1 = 3i$;

c) $15x^4 + 23x^3 + 544x^2 + 828x + 144 = 0$, dacă $x_1 = 6i$;

d) $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - mx + n = 0$, $m, n, \in \mathbf{R}$ dacă $x_1 = 2 + i$;

e) $2x^6 - x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 9x - 9 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{2} + i$;

f) $x^5 - 56x^4 - 10x^3 + 560x^2 + x - 56 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;

g) $x^4 - (63 - 64\sqrt{3})x^3 - (65 + \sqrt{3})x^2 - (63 - \sqrt{3})x + 64 + 64\sqrt{3} = 0$,

dacă $x_1 = 1 + \sqrt{3}$;

h) $3x^3 + (3i - 4)x^2 - (4i - 1)x + i = 0$, dacă $x_1 = -i$;

i) $x^3 - 2x^2 + nx + p = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{2}$;

j) $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, dacă $x_1 = 1 + 2i$;

k) $x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$, dacă $x_1 = -2 - \sqrt{3}$.

94. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$. Să se determine m, n, p astfel ca f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15 , iar ecuația $f(x) = 0$ să aibă o rădăcină egală cu $-1 + i$.

95. Să se arate că dacă p, q sunt numere reale astfel încât $4p^3 +$

$+27q^2 \leq 0$, atunci rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$ sunt reale.

96. Să se rezolve ecuațiile bipătrate:

a) $x^4 - (2m^2 - 1)x^2 + (4m^2 - 6) = 0$; b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

c) $x^4 - 20x^2 + 96 = 0$; d) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$;

e) $x^4 - (2m + 1)x^2 + m^2 + m = 0$; f) $x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0$.

97. Să se rezolve ecuațiile reciproce:

a) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$;

b) $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = 0$;

c) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$;

d) $2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0$;

e) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;

f) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$.

98. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$x^6 - (m - 1)x^4 + (m - m^2)x^2 + 2m - m^2 = 0, m \in \mathbf{R}$.

99. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$x^4 + x^3 + x^2 + mx + m^2 = 0, m \in \mathbf{R}$.

100. Să se rezolve ecuația $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = ax^2, a \in \mathbf{R}$. Discuție.

101. Să se rezolve ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2 = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

102. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că ecuația în $x, (x + z)^n - (x + \bar{z})^n = 0$ are toate rădăcinile reale.

103. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, unde $a_i \in \mathbf{R} (0 \leq i \leq n)$. Dacă $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, atunci oricare ar fi rădăcina α (reală sau complexă) a lui f , avem $|\alpha| \leq 1$.

104. Fie $\mathbf{Z}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți numere întregi, p un număr întreg prim și $f, g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $p \mid fg \Rightarrow p \mid f$ sau $p \mid g$.

105. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Notăm cu $c(f)$ = cel mai mare divizor comun al coeficienților lui f . Dacă $f, g \in \mathbf{Z}[X]$ să se arate că $c(fg) = c(f) \cdot c(g)$.

106. Criteriul lui Einstein: Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n (n \geq 1)$ un polinom din $\mathbf{Z}[X]$ astfel încât $c(f) = 1$. Presupunem că există un număr prim p astfel încât $p \mid a_i, (\forall) 0 \leq i \leq n - 1, p$ nu divide pe a_n și p^2 nu divide pe a_0 . Atunci f nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

107. Dacă p este un număr prim, polinomul $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

108. Să se arate că polinomul $X^{52} + X^{51} + X^{50} + \dots + X^2 + X + 1$ nu se

poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

109. Să se arate că polinomul $X^n - 120$ ($n \geq 1$) nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

110. Să se arate că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$, unde p este un număr prim, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

111. Să se arate că polinomul $X^{2^n} + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

112. Să se determine numerele întregi a, b astfel încât polinomul $X^4 + aX^2 + bX + 1$ să se descompună în produsul a două polinoame de grad mai mic decât patru, cu coeficienți numere întregi.

113. Să se arate că polinomul $f = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n) - 1$, unde a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere întregi distincte, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame de grad mai mic decât n , cu coeficienți întregi.

114. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) astfel încât $ac + bc$ este număr impar. Să se arate că acest polinom nu se poate scrie ca produsul a două polinoame de grad mai mic decât 3, cu coeficienți întregi.

115. Să se arate că ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a^2 - 2b < 0$, nu are toate rădăcinile reale.

116. Fie $a_0, a_1, \dots, a_{1986}$ coeficienții polinomului $(1 + x + x^2)^{993}$, a_k fiind coeficientul lui x^k , $0 \leq k \leq 1986$.

Să se arate că $a_0 + a_2 + \dots + a_{1986}$ este un număr par.

117. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ numere complexe distincte și $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că polinomul

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \dots (X - a_{n+1})}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{n+1})}$$

este unicul polinom de grad $\leq n$ astfel încât

$$f(a_i) = c_i, (\forall) i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

118. Fie $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ polinoame cu coeficienți complecși, astfel încât $\text{grad } f_i = i, 0 \leq i \leq n$.

a) Dacă f este un polinom din $\mathbb{C}[X]$ astfel încât $\text{grad } f \leq n$, atunci există în mod unic numerele complexe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, astfel încât $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$;

b) Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ și $a \in \mathbb{C}$, să se arate că f este de forma

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{X - a}{1!} + \alpha_2 \frac{(X - a)^2}{2!} + \dots + \alpha_n \frac{(X - a)^n}{n!},$$

unde $\alpha_i \in \mathbb{C} (0 \leq i \leq n)$.

119. Fie numerele a_1, a_2, \dots, a_{n+1} numere complexe distincte două câte două și c_1, c_2, \dots, c_{n+1} numere complexe arbitrare. Să se arate că există un unic polinom f de grad $\leq n$ de forma $f = \alpha_0 + \alpha_1(X - a_1) + \alpha_2(X - a_1)(X - a_2) + \dots + \alpha_n(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$ astfel încât $f(a_i) = c_i, 1 \leq i \leq n + 1$.

120. Să se determine valorile lui a astfel încât ecuația

$$(x - a^2)(a(x - a)^2 - a - 1) + 1 = 0$$

să aibă mai multe rădăcini pozitive decât negative.

121. Să se determine valorile lui a astfel încât ecuația

$$((x - a)^2 - 2a - 4)(x - a)^2 + 2a + 3 = 0$$

să aibă mai multe rădăcini negative decât pozitive.

122. Să se arate că ecuația algebrică

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

astfel încât $a_k \in \{-1, 0, 1\}, 1 \leq k \leq n$, nu are rădăcini reale de modul > 2 .

123. Dacă x_1, x_2, \dots, x_{n-1} sunt rădăcinile diferite ale ecuației $x^n - 1 = 0$, să se demonstreze că:

$$\frac{1}{1 - x_1} + \frac{1}{1 - x_2} + \dots + \frac{1}{1 - x_{n-1}} = \frac{n - 1}{2}.$$

124. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, un polinom de grad n , astfel încât $f(0), f(1), \dots, f(n)$ sunt numere întregi. Să se arate că $(\forall) k \in \mathbb{Z}, f(k) \in \mathbb{Z}$.

125. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ nu este polinomială.

126. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, un polinom care admite o rădăcina întreagă. Să se arate pentru orice număr natural $n, f(0)f(1) \dots f(n)$ este divizibil cu $(n + 1)!$.

Capitolul XIV PERMUTĂRI

1. Să se calculeze $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$ dacă :

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Să se calculeze puterile $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots$, în cazul că :

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Să se determine permutarea $x \in S_4$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{4. Dacă } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ să se calculeze } \sigma^{123}; \sigma^{210}; \sigma^{145}.$$

$$\text{5. Dacă } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ să se calculeze } \sigma^{100}; \sigma^{151}; \sigma^{651}.$$

6. Să se determine numărul de inversiuni și signatura pentru fiecare din permutările următoare:

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ e) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ g) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_4$, astfel încât $x^2 = u$.

8. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_7$, astfel încât $x^2 = u$.

9. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_3$, astfel încât $x^2 = u$.

10. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_4$, astfel încât $x^2 = u$.

11. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & i & 3 & j & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine i și j astfel încât σ să fie o permutare pară.

12. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & i & 2 & 8 & j & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine i și j astfel încât permutarea σ să fie impară.

13. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n & n+1 & n+2 \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 \dots & 2n-1 & 2n & 2n-2 \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ . Să se determine n astfel încât σ să fie pară (respectiv impară).

14. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se determine toate permutările $x \in S_5$ astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

15. Fie numărul de cinci cifre $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ unde : $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$. Să se calculeze suma $\sum_{\sigma \in S_5} \overline{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)} a_{\sigma(5)}}$.

16. Fie numărul 64251. Facând toate permutările posibile ale cifrelor acestui număr obținem 120 numere distincte. Al câtelea număr în ordinea crescătoare din cele 120 de numere ocupă numărul 64251?

17. Fie numărul 45251. Câte numere distincte obținem permutând toate cifrele acestui număr? Să se calculeze suma tuturor acestor numere.

18. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ produsul $P_\sigma = \prod_{i=1}^n \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right)$ este maxim? (r și s sunt două numere naturale ≥ 1).

19. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este minimă?

20. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^n a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^n a_i a_{\sigma(i)}$ este minimă?

21. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este minimă?

22. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ astfel încât să avem

$$a_1 a_{\sigma(1)} < a_2 a_{\sigma(2)} < \dots < a_n a_{\sigma(n)}.$$

23. Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n$ care au două inversiuni precum și numărul lor.

24. Să se arate că orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziții de forma : $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), \dots, (1\ n)$.

25. Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, să se arate că

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Capitolul XV MATRICE

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $f(X) = X^2 + 2X + I_3$, să se calculeze $f(A)$.

2. Fie matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $f(X) = 2X^2 - 5X + I_2$, să se calculeze $f(A) + f(B)$ și $f(A+B)$.

3. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n.$$

4. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n.$$

5. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze A^n , unde $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n .

7. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

8. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n.$$

9. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}. \text{ Să se calculeze } A^n.$$

10. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ să se calculeze A^n .

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^n A^k$.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^n A^k$.

13. Să se găsească matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2 - 4X +$
 $+13I_2 = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine u și v
astfel încât $AX = XA$.

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real nenul.

Să se determine a astfel încât egalitatea $A^n = A$ să aibă loc pentru un anumit număr natural n .

16. Să se afle matricea A , astfel încât $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Să se afle matricea A , astfel încât $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} l & m \\ p & q \end{pmatrix}$ și a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, atunci $m - l, p - m, q - p$ sunt în progresie aritmetică.

19. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cer toate matricile X care au proprietatea
 $XA = AX$.

20. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ 4X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & 7 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \end{cases} \quad X, Y \in M_3(\mathbf{R}).$$

21. Fie $f(x) = x^2 - 4x + 4I_3$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se determine a ,

astfel încât $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, având elementele numere naturale. Să se determine A , astfel încât să avem egalitatea $(1 \ 2 \ 4) A = (3 \ 1 \ 2)$.

23. Fie A o matrice de tipul $(4, 3)$ având elementele numere naturale. Să se determine această matrice, astfel încât să avem egalitatea:

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

24. Să se determine matricele $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $A^2 + A + I_2 = O_2$. Să se arate că A este inversabilă și să se afle inversa sa.

25. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $AB = BA$. Să se arate că:

a) $A^k B^l = B^l A^k$, oricare ar fi $k, l \in \mathbf{N}$;

b) $(A + B)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i A^{m-i} B^i$ oricare ar fi $m \in \mathbf{N}^*$.

26. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Să se calculeze $(I + A)^n$ unde $n \in \mathbf{N}^*$.

27. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că:

i) $[A, A] = 0$; ii) $[A, B] = -[B, A]$; iii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$, $(\forall) A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$.

28. Cu notațiile din problema 27, să se arate că dacă $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ atunci $[[A, B]^2, C] = 0$.

29. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $AB = BA$ oricare ar fi $B \in M_n(\mathbb{C})$, să se arate că $A = aI_n$, unde I_n este matricea unitate.

30. Să notăm cu M mulțimea tuturor matricilor de tipul (m, n) în care toate elementele sunt numerele $+1$ sau -1 și astfel încât produsul numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie $+1$. Să se calculeze numărul elementelor mulțimii M .

31. Oricare ar fi matricile $A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_2(\mathbb{C})$ să se arate că

$$\sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} = 0.$$

32. Pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de ordinul n , notăm cu

$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ($\text{Tr}(A)$ se numește *urma matricii* A). Să se arate că:

1) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, $(\forall) A, B \in M_n(\mathbb{C})$;

2) $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$, $(\forall) \alpha \in \mathbb{C}$ și $A \in M_n(\mathbb{C})$;

3) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $(\forall) A, B \in M_n(\mathbb{C})$;

4) $\text{Tr}(UAU^{-1}) = \text{Tr}(A)$, $(\forall) A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și $(\forall) U$ inversabilă.

Capitolul XVI DETERMINANȚI

1. Pornind de la definiția determinantului, să se determine semnul următorilor termeni :

a) $a_{13} a_{24} a_{31} a_{45} a_{52}$; b) $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{55}$; c) $a_{16} a_{21} a_{32} a_{45} a_{53} a_{64}$;

d) $a_{13} a_{26} a_{32} a_{44} a_{51} a_{65}$.

2. Să se determine i și j astfel încât termenul $a_{12} a_{2i} a_{34} a_{4j} a_{51}$ să intre cu semnul $+$ în dezvoltarea determinantului de ordinul 5.

3. Care dintre produsele următoare apar în dezvoltarea determinantului de ordinul 6:

a) $a_{13} a_{21} a_{34} a_{56} a_{62}$; b) $a_{13} a_{21} a_{34} a_{45} a_{51} a_{62}$; c) $a_{12} a_{23} a_{35} a_{41} a_{52} a_{64}$?

4. Folosind numai definiția determinantului, să se determine coeficienții lui X^4 și X^3 în dezvoltarea următorului determinant:

$$\begin{vmatrix} 3X & -X & 1 & -1 \\ 1 & -2X & 2 & 1 \\ 3 & 2 & X & 4 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{vmatrix}.$$

5. Folosind numai definiția determinantului, să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a & a \dots & a \\ 0 & 2 & -a & a \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & -a \dots & a \\ \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & n \end{vmatrix}.$$

6. Folosind numai definiția determinantului, să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Folosind proprietățile determinantilor, să se demonstreze următoarele egalități:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a-b & \alpha-\beta & p-q \\ b-c & \beta-\gamma & q-r \\ c-a & \gamma-\alpha & r-p \end{vmatrix} = 0; \text{ b) } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd.$$

8. a) Dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul. b) Să se arate că există determinanți nenuli de ordinul n are $n^2 - n + 1$ elemente egale.

9. Să se arate că dacă un determinant de ordinul n are $n^2 - n + 1$ elemente nule, atunci determinantul este nul.

$$\text{10. Să se rezolve ecuația } \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4\alpha^2 & -5\alpha & 4x \end{vmatrix} = 0, \alpha \in \mathbf{R}.$$

11. Se consideră
$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Să se dezvolte determinantul, punând rezultatul sub o formă mai simplă.

12. Să se rezolve ecuația
$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x' & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Să se arate că
$$\begin{vmatrix} \frac{2}{1+x^2}+2 & \frac{2}{1+x^2}+5 & \frac{2}{1+x^2}+3 \\ -2x & 1-5x & -3x \\ 4 & 7+x & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Se consideră $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$, $g(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $h(x) = \sqrt{1-\sin x}$. Să se arate că oricare ar fi tripletul $a, b, c \in [0, \pi / 2]$ avem:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0.$$

15. Să se calculeze determinantul, scriind rezultatele sub formă de produs:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}.$$

16. Să se arate că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \dots & x_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+\dots+x_n.$$

17. Dacă numerele $a_{11} a_{12} \dots a_{1n}, a_{21} a_{22} \dots a_{2n},$
 $a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn}$ sunt divizibile cu N , atunci determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ este divizibil cu } N.$$

18. Să se rezolve ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

19. Dacă $p < m$, atunci

$$\begin{vmatrix} C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^p \\ C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+p}^0 & C_{m+p}^1 & \dots & C_{m+p}^p \end{vmatrix} = 1.$$

20. Fie ecuația algebrică $x^n + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_n = 0$ cu $a_2, \dots,$
 $a_n \in \mathbb{C}$. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix},$$

unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt rădăcinile ecuației date.

21. Să se calculeze determinantul de ordinul n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}, \quad n \geq 3.$$

22. Să se calculeze determinanții de ordinul n :

$$\text{a)} \left| \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| ; \text{b)} \left| \begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right| .$$

23. Să se arate că

$$\left| \begin{array}{ccc} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & 1+x_ny_n \end{array} \right| = 0, \quad n \geq 3.$$

24. Să se arate că

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_c \cdot h_a \\ 1 & c & h_b \cdot h_a \end{array} \right| = 0,$$

unde a, b, c sunt lungimile corespunzătoare laturilor unui triunghi, iar h_a, h_b, h_c , sunt lungimile înălțimilor corespunzătoare.

25. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

26. (Formula Binet - Cauchy). Fie m, n numere naturale nenule cu $m \leq n$. Atunci pentru orice două matrice $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ și $B \in M(n, m, \mathbb{C})$ are loc egalitatea

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \det A_{j_1, \dots, j_m} \det B^{j_1, \dots, j_m},$$

unde A_{j_1, \dots, j_m} (respectiv B^{j_1, \dots, j_m}) este matricea pătratică de ordinul m având m coloane (respectiv m linii) egale în ordine cu coloanele (respectiv liniile) de indici j_1, j_2, \dots, j_m ale matricei A (respectiv matricei B).

27. Fie n un număr natural nenul. Atunci pentru orice două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ are loc egalitatea

$$\det(AB) = \det A \cdot \det(B).$$

28. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ numere ($n \geq 2$). Atunci are loc identitatea

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

29. Dacă A este matrice cu m linii și n coloane ($m \geq n$), atunci $\det(AA) = \sum_M M^2$ unde M parcurge mulțimea minorilor de ordin n ai lui

A (care sunt în număr de C_m^n).

30. Fie matricea pătratică de ordinul n , $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ unde $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Considerăm matricea $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ unde $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$, oricare ar fi $i = 1, \dots,$

$n; j = 1, \dots, n$. Să se arate că $\det B = \overline{\det A}$.

31. Fie A, B două matrici pătratice de ordinul n , având elementele numere reale, astfel încât $AB = BA$. Să se arate că: $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

32. Fie matricea de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

i) Să se arate egalitatea

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0.$$

ii) Dacă există un $k \geq 2$ astfel încât $A^k = 0$, atunci $A^2 = 0$.

33. Fie $A = (a)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, n$ și

$$B = \begin{pmatrix} b & b & & b \\ b & b & & b \\ \dots & \dots & & \dots \\ b & b & \dots & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Să se arate că, pentru $n = 2, 3$: $\det(A + B) \cdot \det(A - B) \leq (\det A)^2$.

34. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $m > n$. Să se arate că $\det(AB) = 0$. În particular, $\det(AA^t) = 0$.

35. Fie A_1, A_2, \dots, A_n mulțimi finite. Notăm cu a_{ij} numărul de elemente ale mulțimii $A_i \cap A_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Dacă A este matricea $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

să se arate că $\det(A) \geq 0$.

36. Fie $A \in M_{3,2}(\mathbb{C})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{C})$. Notăm $M = AB$, $N = BA$.

Presupunem că $\det M \neq 0$, $\det N \neq 0$ și $M^2 = kM$, unde $k \neq 0$. Să se determine $\det N$ în funcție de k .

- 37.** Fie $A = (a)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de ordinul n , definită astfel:
 $a_{ij} = \max(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze $\det A$.
- 38.** Fie $A = (a)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de ordinul n , definită astfel:
 $a_{ij} = \min(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze $\det A$.
- 39.** Fie $A = (a)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de ordinul n , definită astfel:
 $a_{ij} = |i - j|$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Să se calculeze $\det A$.
- 40.** Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt -1 și +1. Să se arate că:
 a) $\det A$ este un număr par ;
 b) să se determine valoarea maximă (respectiv minimă) pe care o poate lua $\det A$.
- 41.** Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt 0 și 1. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.
- 42.** Fie $A = (a)_{1 \leq i, j \leq n}$ o matrice pătratică de ordinul n , astfel încât $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ oricare ar fi i, j . Sa se arate că $\det A$ este un număr întreg multiplu de 2^{n-1} .
- 43.** Să se calculeze valoarea maximă (respectiv minimă) a determinanților de ordinul 4 ale căror elemente sunt -1 și +1.

Capitolul XVII

RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

- 1.** Să se calculeze rangul matricelor :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}; & \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & -12 & 10 & -7 & -1 \\ 15 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 17 \\ 4 & 12 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}; & \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -7 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

- 2.** Să se calculeze rangul matricelor următoare, pentru diferite valori

ale parametrilor :

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha - 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$b) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 & -4 & 5 \\ \alpha & \alpha & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 2 & 1 \\ \alpha & 1-2\beta & 3 & 1 \\ \alpha & -\beta & \beta+3 & 2\beta-1 \end{pmatrix}$$

3. a) Cum se poate schimba rangul unei matrice, dacă se schimbă unul din elementele sale ?

b) Cum se poate schimba rangul unei matrice, prin schimbarea elementelor unei linii ? Dar prin schimbarea elementelor a k linii?

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Dacă A^* este matricea adjunctă a unei matrici A , să se arate că:

$$(A \cdot A^*)^n = (A^* \cdot A)^n = A^n (A^*)^n = (A^*)^n A^n, n \in \mathbf{N}.$$

5. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că matricea A este inversabilă dacă și numai dacă este nenulă. În acest caz să se calculeze inversa sa.

6. Să se afle dacă matricele următoare sunt inversabile și în caz afirmativ să se găsească inversele lor :

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{R};$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{C};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & i \\ -i & -i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Să se afle dacă matricele următoare, de ordin n , sunt inversabile

și în caz afirmativ să se găsească inversele lor :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}; \text{ b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{c)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{d)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\alpha \in \mathbf{R}$.

8. Să se arate că pentru o matrice nesingulară A de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

inversa sa $B = A^{-1}$ este de forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Fie A o matrice pătratică cu coeficienți complecși. Să se demonstreze că, dacă există $k \geq 2$ astfel încât $A^k = 0$, atunci matricea $I - A$ este inversabilă și avem:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

10. Fie A o matrice inversabilă cu coeficienți complecși. Să se demonstreze că

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

11. Fie A, B, C matrice astfel încât $AB = AC$. Sunt oare egale

matricele B și C ? Dar dacă A este o matrice pătratică nesingulară?

12. Fie $A \in M(m, n, C)$ și $B \in M(n, p, C)$. Să se arate că $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}A, \text{rang}B)$. Să se deducă de aici că, dacă $A \in M(m, n, C)$ unde $m > n$, atunci $\det(A'A) = 0$.

13. O matrice $A \in M_m(C)$ se numește involutivă dacă $A^2 = I_n$. O matrice $B \in M_m(C)$ se numește idempotentă dacă $B^2 = B$. Să se arate că:

a) Dacă B este o matrice idempotentă, atunci matricea $2B - I_n$ este involutivă.

b) Dacă matricea A este involutivă, atunci matricea $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

14. Fie E_n matricea pătratică de ordin n ale cărei elemente sunt toate egale cu 1. Să se arate că:

a) $E_n^2 = nE_n$; b) $I_n - E_n$ este inversabilă și avem

$$(I_n - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} E_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n .

15. Fie $A \in M_{m,n}(C)$ de rang 1. Să se arate că:

a) Există numerele b_1, b_2, \dots, b_m și c_1, c_2, \dots, c_n , astfel încât oricare ar fi i, j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) să avem $a_{ij} = b_i c_j$.

b) Matricea A se poate scrie ca produsul XY a două matrice X, Y unde $X \in M_{m,1}(C)$, iar $Y \in M_{1,n}(C)$.

16. Fie $A \in M_n(C)$ de rang 1. Să se arate că:

a) există un număr α astfel încât $A^2 = \alpha A$;

b) dacă $\alpha \neq -1$, atunci matricea $I_n + A$ este inversabilă și avem :

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha + 1} A.$$

Să se deducă de aici, în particular problema 5.

17. Fie A o matrice nesingulară și $B = XY$, o matrice de rang 1 (vezi problema 6). Să se demonstreze că dacă matricea $A + B$ este nesingulară, inversa sa este dată de formula:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha + 1} A^{-1} B A^{-1},$$

unde $\alpha = Y A^{-1} X$.

Presupunând cunoscute matricele A^{-1}, X, Y , să se calculeze numărul

înmulțirilor și împărțirilor necesare pentru a trece de la A^{-1} la $(A + B)^{-1}$.

18. Fie A o matrice nesingulară de ordinul n și \bar{A} matricea care se obține adugând la un element a_{ij} al lui A , numărul α . Să se determine α astfel încât \bar{A} să fie inversabilă și în acest caz să se determine inversa sa în funcție de elementele matricei A^{-1} și numărul α .

19. Fie A o matrice nesingulară de ordinul n , iar \bar{A} matricea obținută adăgând $a \in \mathbb{C}$ la fiecare element al său. Să se determine a pentru care matricea \bar{A} este inversabilă și în acest caz să se calculeze inversa sa în funcție de elementele matricei A^{-1} și numărul a .

20. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ f) } X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix};$$

$$\text{h) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Capitolul XVIII SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații cu ajutorul regulii lui Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13\alpha, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -26\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13\alpha; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 16\alpha, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 14\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 30\alpha, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = \alpha; \end{cases}$$

unde α este un parametru real.

2. Să se afle valorile lui λ pentru care sistemele următoare au soluții nenule și în acest caz să se rezolve :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x + (1 + \lambda)y + z + t = 0, \\ x + y + (2 + \lambda)z + t = 0, \\ x + y + z + t = 0; \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = 0; \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} x + 4y + z - 2t = 0, \\ 2x - 5y - 4z + 2t = 0, \\ 5x + 3y - 3z + 4t = 0, \\ 2x - \lambda y - 2z = 0; \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 13x - 5y - 6z = \lambda x, \\ 16x - 7y - 8z = \lambda y, \\ 16x - 6y - 7z = \lambda z; \end{cases} \end{aligned}$$

3. Să se decidă dacă sistemele următoare sunt compatibile și în acest caz să se rezolve :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3, \\ x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x + y - 2z = \alpha, \\ x + y + z = 3; \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbf{R});$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 3z = -1; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + z + t = 10, \\ x + y - z - 2t = -8, \\ 5x + 5y - z - 4t = -4, \\ x + y + 3z + 4t = 28. \end{cases}$$

4. Să se determine relația dintre parametrii a și b , pentru care sistemul următor este compatibil

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0, \\ x + y - 4ab = 0, \\ (a^2 + 1)x - (2ab + 1)y + b = 0. \end{cases}$$

5. Să se rezolve sistemele următoare. Discuție, după parametrii reali α și β .

$$\text{a) } \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ (\alpha + 1)x_1 + (\beta + 1)x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha\beta x_2 + x_3 = \beta \\ x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (3 - 2\alpha)x_1 + (2 - \alpha)x_2 + x_3 = \alpha, \\ (2 - \alpha)x_1 + (2 - \alpha)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2 - \alpha)x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \beta, \\ (2 - \alpha)x_1 + (1 + \alpha)x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \alpha\beta, \\ x_1 + (3 - \alpha)x_2 + (2 + \alpha)x_3 + 3x_4 = \beta, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (8 + \alpha)x_4 = (2 + \alpha)\beta. \end{cases}$$

6. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca suma a două soluții ori produsul unei soluții printr-un număr $\alpha \neq 1$ să fie din nou o soluție a aceluiași sistem de ecuații liniare.

7. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca o combinație liniară dată, de soluții ale unui sistem neomogen de ecuații liniare, să fie din nou o soluție a acestui sistem.

8. a) Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

să aibă soluție unică.

b) Aceeași problemă pentru sistemul

$$a_ix + b_iy + c_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

9. a) Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0, \end{cases}$$

să aibă soluție unică.

b) Aceeași problemă pentru sistemul

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

10. Dacă $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x = by + cz + du + ev, \\ y = cz + du + ev + ax, \\ z = du + ev + ax + by, \\ u = ev + ax + by + cz, \\ v = ax + by + cz + du \end{cases}$$

să aibă soluții nenule.

11. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali

$$\begin{cases} \alpha x + ay + bz + ct = 0, \\ ax - \alpha y - fz + et = 0, \\ bx + fy - \alpha z - dt = 0, \\ cx - ey + dz - \alpha t = 0 \end{cases}$$

să aibă soluții nenule.

12. Se consideră sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} mx + y + z = 4, \\ x + 2my + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Se cere :

- Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.
- Să se determine valorile lui m pentru care soluția sistemului (x, y, z) satisface condițiile $x + z > y$ și $x + y \geq z$.
- Să se determine valorile lui m pentru care soluția (x, y, z) a sistemului are componente pozitive.

13. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice oarecare. Se numește *polinom caracteristic* al matricei A , polinomul $P_A(X) = \det(XI_n - A)$. Numărul λ se numește *valoare proprie* a matricei A dacă ecuația $Ax = \lambda x$ are soluții nenule. Orice soluție nenulă $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ a acestei ecuații se numește *vector propriu* al matricei A (corespunzător valorii proprii λ).

Să se arate că numărul λ este o valoare proprie a matricei A dacă și numai dacă este rădăcină a polinomului caracteristic.

14. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricelor:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0); \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice, ale cărei valori proprii sunt : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Fie, de asemenea, $f \in \mathbb{C}[X], f = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} + \dots + a_k X + a_k$ și notăm $f(A) = a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \dots + a_k A + a_k$. Să se arate că:

$$\det(f(A)) = \prod_{i=1}^n f(\lambda_i).$$

16. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice, ale cărei valori proprii le presupunem cunoscute. Să se determine valorile proprii ale matricelor:

- A^{-1} (dacă există);
- A^2 ;
- A^k , pentru k număr natural;
- $a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \dots + a_k A + a_k$, unde $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$;

17. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice. Să se arate că dacă x este un vector propriu al matricei A , atunci x este, de asemenea, vector propriu al matricelor:

- a) A^{-1} (dacă există); b) A^2 ; c) A^k , pentru k număr natural;
- d) $a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \dots + a_k A + a_k$, unde $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$;

Capitolul XIX LEGI DE COMPOZIȚIE. GRUPURI

1. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ astfel: $x * y = x + y - xy$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Să se arate că această lege de compoziție este asociativă, comutativă și are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție \circ astfel: $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Să se arate că această lege de compoziție este asociativă, comutativă și are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

3. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ prin $x * y = 2x + y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se studieze proprietățile acestei legi de compoziție;

b) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze: $a_2 = a * a$, $a_3 = a_2 * a$ și în general, $a_k = a_{k-1} * a$. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$, număr natural, avem $a_n = (2^n - 1)a$.

4. Pe mulțimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziție $*$, punând

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{pentru orice } x, y \in [0, +\infty).$$

a) Să se studieze proprietățile acestei legi de compoziție.

b) Să se arate că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de aceasta.

c) Să se afle x , dacă

$$2 * x = 3.$$

5. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție \perp , prin: $x \perp y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Să se studieze proprietățile acesteia.

6. Pe mulțimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziție \top astfel

$$x \top y = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Să se studieze proprietățile acesteia.

7. Fie $a > 0$ un număr fixat și $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq a\}$. Definim pe A o lege de compoziție \circ astfel

$$x \circ y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{a^2}}.$$

Să se demonstreze că:

- a) legea de compoziție este asociativă;
- b) dacă $x, y, z \in A$ și $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$.

8. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ definim legea de compoziție $*$, prin $a * b = c \Leftrightarrow c$ este restul împărțirii lui a^b la 5.

- a) Să se asocieze tabelul de definiție al acesteia;
- b) Să se studieze proprietățile legii de compoziție.

9. Fie A o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție, notată multiplicativ, astfel încât:

- a) dacă $a, b, c \in A$ și $ab = c$, atunci $ac = b$;
- b) $aa = a$, oricare ar fi $a \in A$.

Să se arate că :

- a) oricare ar fi $a, b \in A$, ecuația $ax = b$ are soluție unică în A ;
- b) dacă A este finită și $ab \neq b$ oricare ar fi $b \neq a$, atunci aceasta are un număr impar de elemente.

10. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale, definim legea de compoziție $*$, punând:

$$x * y = ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se determine a, b, c astfel încât legea să fie comutativă și asociativă.

11. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale, definim legea de compoziție $*$, prin:

$$x * y = xy + ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

- a) Ce relație există între unde a, b, c pentru ca legea să fie asociativă?
- b) Legea $*$ este asociativă \Leftrightarrow are element neutru.
- c) Există elemente nesimetrizabile?

12. Pe mulțimea \mathbf{N} a numerelor naturale, definim următoarele două legi de compoziție : $m \perp n = \text{c.m.m.d.c. } \{m, n\}$ și $m \top n = \text{c.m.m.m.c. } \{m, n\}$, oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$.

Să se studieze proprietățile acestor legi de compoziție. Să se arate

că:

$$m \perp n (n \top p) = (m \perp n) \top (m \perp p),$$

$$m \top n (n \perp p) = (m \top n) \perp (m \top p),$$

oricare ar fi $m, n, p \in \mathbf{N}$.

13. Pe mulțimea \mathbf{Z} a numerelor întregi, definim următoarele două legi de compoziție:

$$a \top b = \max \{a, b\} \text{ și } a \perp b = \min \{a, b\},$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbf{Z}$.

Să se studieze proprietățile acestor două legi de compoziție. Să se arate că:

$$a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c),$$

$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

14. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale, definim două legi de compoziție : $*$ și \circ , punând

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \text{ și } x \circ y = x + y + 1, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se studieze proprietățile acestor două legi de compoziție.

b) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x * y = -1, \\ x \circ y = 0. \end{cases}$$

15. Fie α, β unghiuri măsurate în radiani. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale, definim legea de compunere $*$, prin:

$$x * y = x \cos^2 \alpha + y \cos^2 \beta, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$, avem :

$$(x * y) + z = (x + z) * (y + z) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}.$$

16. Fie M o mulțime cu n elemente. Câte legi de compoziție se pot defini pe M ? Câte sunt comutative dintre acestea? Câte au element neutru?

17. Pe mulțimea \mathbf{C} a numerelor complexe, definim legea de compoziție \top , prin

$$z_1 \top z_2 = iz_1 \cdot z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulțimea $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ este o parte stabilă față de legea \top , iar \mathbf{C}^* cu operația indusă este un grup comutativ.

18. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale, definim legea de compoziție $*$, punând

$$x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulțimea $R_1 = R \setminus \{1\}$ este o parte stabilă față de legea $*$, iar R_1 cu operația indusă este un grup comutativ.

19. Pe mulțimea C a numerelor complexe definim legea de compoziție \circ , prin:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in C.$$

Să se arate că mulțimea $C_1 = C \setminus \{1\}$ este o parte stabilă față de legea \circ , iar C_1 cu operația indusă este un grup comutativ.

Să se calculeze acest grup

$$i \circ i \circ i \circ i \circ i \text{ și } i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i.$$

20. Pe mulțimea $(0, +\infty)$ definim legea de compoziție \perp , prin:

$$x \perp y = x^{\ln y}, \text{ oricare ar fi } x, y \in (0, +\infty).$$

Să se arate că mulțimea $A = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ este o parte stabilă față de legea \perp , iar A cu operația indusă este un grup comutativ.

21. Pe mulțimea R a numerelor reale definim legea de compoziție \circ , prin:

$$x \circ y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in R.$$

Să se arate că mulțimea $R_1 = R \setminus \{1\}$ este o parte stabilă față de legea \circ , iar R_1 cu operația indusă este un grup comutativ.

22. Pe mulțimea R a numerelor reale definim legea de compoziție $*$, prin:

$$x * y = 2(x + y - 1) - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in R.$$

Să se arate că mulțimea $R_2 = R \setminus \{2\}$ este o parte stabilă față de legea $*$, iar R_2 cu operația indusă este un grup comutativ.

23. Pe mulțimea Q a numerelor raționale definim legea de compoziție \circ , prin:

$$x \circ y = x + y - \frac{xy}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in Q.$$

Să se arate că mulțimea $Q_2 = Q \setminus \{2\}$ este o parte stabilă față de legea \circ , iar Q_2 cu operația indusă este un grup comutativ.

24. a) Să se arate că mulțimea $A = \{z \in C \mid z = a - b + i(a + b); a, b \in Z\}$ este grup în raport cu adunarea numerelor complexe.

b) Este mulțimea A parte stabilă în raport cu înmulțirea?

25. Fie k un număr natural și $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q \text{ și } a^2 - kb^2 = 1\}$.

Să se determine toate numerele naturale k astfel încât H să fie parte stabilă față de înmulțire.

26. Fie G mulțimea matricelor din $M_3(R)$ de forma

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ cu } \det(M_{a,b}) = 1.$$

Să se arate că G are structură de grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

27. Să se arate că mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -2y & x-4y \end{pmatrix} \mid x \neq 0, x^2 - 12y^2 = 1 \right\} \text{ împreună cu operația de}$$

înmulțire a matricelor formează un grup comutativ.

28. Fie mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Să se arate că G împreună cu de înmulțirea matricelor este un grup necomutativ. Să se determine toate subgrupurile grupului G .

29. Există grupuri necomutative G , având proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in G$, $x^2 y^2 = y^2 x^2$?

30. Fie G un grup necomutativ. Dacă $a, b \in G$, astfel încât $a^{-1}ba = b^{-1}$ și $b^{-1}ab = a^{-1}$, atunci $a^2 b^2 = b^2 a^2 = e$, $a^2 = b^2$ și $a^4 = b^4 = e$.

31. Fie G un grup, notat multiplicativ, astfel încât oricare ar fi $a, b \in G$ să avem $(ab)^2 = a^2 b^2$. Să se arate că G este comutativ.

Să se studieze comutativitatea unui grup $(G, *)$ cu proprietatea că $(a*b)^3 = a^3 * b^3$, oicare ar fi $a, b \in G$.

32. Pe mulțimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ definim legile de compoziție \top, \perp , în modul următor:

dacă $x = (m, a)$ și $y = (n, b)$, atunci $x \top y = (m + n, ab)$ și $x \perp y = (mn, a + b)$.

a) Să se studieze proprietățile fiecăreia dintre legile definite.

b) Să se descrie elementele simetrizabile.

c) Să se studieze distributivitatea legii \perp față de \top .

33. Fie n un număr întreg fixat și

$$G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}; n \mid a \text{ și } n \mid b\}.$$

Definim pe G următoarea lege de compoziție

$(a, b) * (a', b') = (aa' + bb', aa' - bb')$, oricare ar fi $(a, b), (a', b') \in G$.

Să se decidă dacă G împreună cu această operație formează un grup.

34. Pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ se consideră matricea

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ și fie } G = \{A_x \mid x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\}. \text{ Să se}$$

arate că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

35. Fie $r \in \mathbf{R}, r \geq 0$ și $A_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = r\}$.

I) Să se determine valorile lui r pentru care A_r este parte stabilă a lui \mathbf{C} în raport cu înmulțirea numerelor complexe și în acest caz să se arate că A_r este grup în raport cu înmulțirea.

II) Fie M o submulțime a lui \mathbf{C} stabilă la adunarea și înmulțirea numerelor complexe, care include pe A_1 . Să se arate că $\{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \subset M$.

36. Fie mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Să se arate că M împreună cu operația de înmulțire a matricelor este un grup comutativ, izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

37. Fie mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} \right\}.$$

Să se arate că G împreună cu înmulțirea matricelor este un grup izomorf cu grupul cu grupul cu S_3 al permutărilor de 3 elemente.

38. Fie matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze puterile: $A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots$.

b) Să se decidă dacă A este inversabilă.

c) Să se arate că mulțimea

$$G = \{A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$$

formează un grup izomorf cu grupul multiplicativ

$$H = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, 1 \leq k \leq 5 \right\}.$$

39. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ astfel $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, n fiind un număr natural impar. Să se arate că $(\mathbf{R}, *)$ este un grup. Mai mult dacă $(\mathbf{R}, +)$ este grupul aditiv al numerelor reale, să se arate că funcția

$$f: (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathbf{R}, *), f(a) = \sqrt[n]{a}$$

este un izomorfism de grupuri.

40. a) Fie $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Să se arate că G_1 împreună cu înmulțirea matricelor formează un grup comutativ.

b) Fie $G_2 = \{1, -1, i, -i\}$. Să se arate că G_2 împreună cu înmulțirea numerelor formează un grup comutativ.

c) Fie

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Să se arate că G_3 cu compunerea permutărilor formează un grup comutativ.

d) Să se cerceteze dacă grupurile G_1 , G_2 , și G_3 sunt izomorfe.

41. Pentru orice $t \in \mathbf{R}^*$ se consideră matricea

$$M_t = \frac{1}{3t} A + \frac{1}{t^2} B, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că:

I) $G = \{M_t \mid t \in \mathbf{R}^*\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor;

II) Grupul G este izomorf cu grupul multiplicativ \mathbf{R}^* al numerelor reale.

42. Fie G un grup finit cu un număr impar de elemente. Să se arate că ecuația $x^2 = a$, $a \in G$, are soluție unică în G .

43. Să se determine toate omomorfismele de grup de la grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ la grupul S_n al permutărilor de n elemente.

44. Să se arate că grupurile aditive $(\mathbf{Z}, +)$ și $(\mathbf{Q}, +)$ nu sunt izomorfe.
 45. Să se arate că grupurile aditive $(\mathbf{Q}, +)$ și $(\mathbf{R}, +)$ nu sunt izomorfe.
 46. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ și $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nu sunt izomorfe.

47. Fie G o mulțime nevidă înzestrată cu o operație asociativă (notată multiplicativ). Să se arate că G este grup \Leftrightarrow ecuațiile $ax = b$, $ya = b$ au soluții în G , pentru orice $a, b \in G$.

48. Fie G o mulțime finită pe care este definită o lege de compoziție asociativă, notată multiplicativ. Dacă operația are proprietatea că, $xy = xz \Rightarrow y = z$ și $yx = zx \Rightarrow y = z$ oricare ar fi $x, y, z \in G$, atunci G este grup.

49. Fie $(\mathbf{R}; +)$ grupul aditiv al numerelor reale, iar (\mathbf{C}^*, \cdot) grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule. Definim funcția

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^*$$

prin $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. Să se arate că:

- f este izomorfism de grupuri;
- $\mathbf{Z} = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 1\}$;
- $\text{Im } f = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$.

50. Fie G mulțimea tuturor șirurilor $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, unde $x_i \in \mathbf{R}$. Definim pe G operația $*$, astfel:

Dacă $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ și $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in G$, atunci

$$x * y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$$

- Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.
- Definim funcțiile f, g, h, k de la G la G , astfel:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_3, x_5, \dots); g(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_4, x_6, \dots); h(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots); k(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots).$$

Să se arate că f, g, h, k sunt izomorfisme de grup.

- Să se arate că $f \circ h = g \circ k = 1_G$, $g \circ h = f \circ k = 0$.

51. Fie $(\mathbf{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi. Să se arate că:

- dacă $n \in \mathbf{Z}$, funcția $\varphi_n: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $\varphi_n(x) = nx$, este un omomorfism de grupuri;
- orice omomorfism de grupuri de la \mathbf{Z} la \mathbf{Z} este de acest tip;
- există printre acestea doar două izomorfisme.

52. Fie G un grup comutativ și să notăm cu H mulțimea

$$H = \{f \mid f: \mathbf{Z} \rightarrow G, f \text{ omomorfism de grupuri}\}.$$

Să se arate că funcția

$$\varphi: H \rightarrow G, \varphi(f) = f(1)$$

este o bijecție.

În particular, să se afle omomorfismele de grup de la grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbb{Z}_n, +)$.

53. Fie $(\mathbb{Q}, +)$ grupul aditiv al numerelor raționale. Să se arate că:

a) dacă $q \in \mathbb{Q}$, funcția $\psi_q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $\psi_q(x) = qx$, este un omomorfism de grupuri;

b) orice omomorfism de grupuri de la \mathbb{Q} la \mathbb{Q} este de acest tip.

54. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbb{Q}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ este cel nul.

55. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n > 0$, la grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ este cel nul.

56. Fie $\mathbb{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{m-1}\}$ și $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}\}$ grupurile

aditive ale claselor de resturi modulo m , respectiv n . Fie mulțimile:

$A = \{f \mid f: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n, f \text{ omomorfism de grupuri}\}$ și

$B = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in \mathbb{Z}_n, m\bar{a} = \bar{0}\}$. Să se arate că :

a) dacă $f \in A$, atunci $f(\hat{1}) \in B$;

b) funcția $\varphi : A \rightarrow B$, $\varphi(f) = f(\hat{1})$, este bijectivă;

c) Să se afle, câte omomorfisme de grupuri de la \mathbb{Z}_m la \mathbb{Z}_n există.

57. Fie S_n grupul permutărilor de n elemente și $A_n \subset S_n$ mulțimea permutărilor pare de n elemente. Să se arate că A_n este un subgrup al lui S_n și să se determine ordinul său.

58. Fie G un grup cu legea notată multiplicativ și $H \subset G$ o submulțime finită nevidă a sa astfel încât, oricare ar fi $x, y \in H$ să avem $xy \in H$. Să se arate că H este un subgrup al lui G .

59. Fie H un subgrup al grupului G și $a \in G$ un element oarecare. Să se arate că mulțimea $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ este un subgrup al lui G .

60. Fie G un grup și H, K două subgrupuri ale sale. Atunci $H \cup K$ este subgrup $\Leftrightarrow H \subset K$ sau $K \subset H$.

61. Fie (G, \cdot) un grup. Să se arate că mulțimea

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \text{ oricare ar fi } x \in G\}$$

este un subgrup al lui G . ($Z(G)$ se numește centrul grupului G .)

62. Fie (G, \cdot) un grup și $x, y \in G$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $xy = yx$.

63. Fie S_n grupul tuturor permutărilor de gradul n . Dacă $n \geq 3$, să se arate că $Z(S_n) = \{e\}$ (e fiind permutarea identică).

64. Fie A_n grupul permutărilor pare de gradul n . Dacă $n \geq 4$, să se

arate că $Z(A_n) = \{e\}$.

65. Fie n un număr natural oarecare și notăm cu

$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Să se arate că :

a) $n\mathbb{Z}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Z}, +)$;

b) orice subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ este de acest tip.

66. Fie $m, n \in \mathbb{Z}$. Să se arate că:

a) $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{mk + nl \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Z}, +)$. De asemenea, $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ este un subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$.

b) $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}$ și $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$, unde (m, n) respectiv $[m, n]$ este c.m.m.d.c., respectiv c.m.m.m.c., al numerelor m și n .

67. Fie G un grup finit cu legea de compoziție notată multiplicativ și H un subgrup al său. Pentru fiecare $a \in G$, notăm $aH = \{ah \mid h \in H\}$.

Să se arate că:

i) Dacă $aH \cap bH \neq \emptyset$, atunci $aH = bH$;

ii) Oricare ar fi $a \in H$, aH și H au același număr de elemente.

68. (Teorema lui Lagrange) Fie G un grup finit. Numărul de elemente al lui G se numește *ordinul* grupului și se notează $\text{ord } G$. Folosind problema precedentă, să se arate că dacă H este un subgrup al lui G , atunci

$$\text{ord } H \mid \text{ord } G.$$

69. Fie G un grup finit și $a \in G$ un element oarecare. Se numește *ordinul* elementului a , cel mai mic număr natural $n \neq 0$ astfel încât $a^n = e$ (e fiind elementul neutru al lui G). Notăm ordinul elementului a prin $\text{ord}(a)$. Să se arate că :

i) Pentru orice $a \in G$, există ordinul său.

ii) Dacă m este un număr întreg astfel încât $a^m = e$, atunci $\text{ord}(a) \mid m$.

iii) Dacă $\text{ord}(a) = n$, atunci mulțimea

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$$

este un subgrup al lui G .

iv) Oricare ar fi $a \in G$, atunci $\text{ord}(a) \mid \text{ord } G$.

70. Fie grupul abelian $(\mathbb{Z}_{120}, +)$. Să se găsească ordinul elementelor:

$\hat{25}$, $\hat{30}$, $\hat{55}$, $\hat{45}$, $\hat{80}$ ale acestui grup.

71. Fie G un grup multiplicativ, cu elementul neutru e .

a) Dacă $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$, să se arate că G este comutativ.

b) Dacă G are proprietatea că $x^3 = e$, oricare ar fi $x \in G$, rezultă că G este comutativ?

72. Fie G un grup finit de ordin par. Să se arate că există în G un element care are ordinul 2. Dacă în plus ordinul lui G este $2n$ cu n impar să se arate că există în G cel mult n elemente de ordinul 2.

73. Fie G un grup comutativ (legea de compoziție fiind notată multiplicativ) de ordinul n . Să se arate că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul elementelor de ordinul 2 ale lui G (în cazul că nu există elemente de ordinul 2, ultimul produs se consideră egal cu elementul neutru e).

74. Folosind problema precedentă, să se demonstreze teorema lui Wilson:

Dacă p este un număr prim, atunci:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Reciproca este adevărată?

75. Folosind problema 69, să se demonstreze teorema lui Fermat:

Dacă p este un număr prim și $a \in \mathbb{Z}$, atunci

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

76. Fie G un grup finit și $a, b \in G$ două elemente oarecare astfel încât $ab = ba$. Dacă $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$ și $(m, n) = 1$, atunci $\text{ord}(ab) = mn$.

77. Fie grupurile aditive $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ și $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{n-1}\}$ și considerăm mulțimea $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \{(\bar{x}, \hat{y}) \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_m, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n\}$. Definim pe $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ operația definită prin:

$$(\bar{x}, \hat{y}) + (\bar{x}', \hat{y}') = (\overline{x+x'}, \hat{y+y'}),$$

oricare ar fi $(\bar{x}, \hat{y}), (\bar{x}', \hat{y}') \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Să se arate că $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ este un grup comutativ. Mai mult, dacă m și n sunt prime între ele, atunci acest grup este izomorf cu grupul aditiv \mathbb{Z}_{mn} .

78. Fie G un grup finit de ordin p , unde p este un număr prim. Să se arate că G este izomorf cu grupul aditiv \mathbb{Z}_p .

79. Fie G un grup finit neapărat comutativ și $x, y \in G$. Să se arate că $\text{ord}(xy) = \text{ord}(yx)$.

80. i) Fie mulțimea $G = \{e, a, b, c\}$, înzestrată cu o lege de compoziție, definită prin următorul tabel

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Să se arate că (G, \cdot) este un grup comutativ (numit *grupul lui Klein*).

ii) Să se arate că orice grup cu 4 elemente este izomorf fie cu grupul aditiv \mathbf{Z}_4 , fie cu grupul lui Klein.

81. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \langle 0 \rangle$ și $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \langle 0 \rangle$ nu sunt izomorfe.

82. Să se arate că grupurile $(\mathbf{Z}[X], +)$ și $(\mathbf{Q}[X], +)$ nu sunt izomorfe.

Capitolul XX

INELE ȘI CORPURI

1. Pe mulțimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$ definim două legi de compoziție, prin:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) (x', y') = (xx', xy' + x'y),$$

oricare ar fi $(x, y), (x', y') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Să se arate că în acest mod $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ devine un inel comutativ și unitar.

2. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n . Să se determine mulțimea:

$$N = \{ \hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbf{Z}_n, \text{ astfel încât există } k \in \mathbf{N}, \hat{x}^k = \hat{0} \}.$$

Fie, de asemenea, $I = \{ \hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbf{Z}_n, \text{ există } k \in \mathbf{N}, \text{ astfel încât } \hat{x}^k = \hat{x} \}$. Să se arate că $N \cap I = \{ \hat{0} \}$.

3. Fie M o mulțime nevidă și $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$, mulțimea submulțimilor sale. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ definim două legi de compoziție în felul următor:

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A),$$

$$A \cdot B = A \cap B,$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{P}(M)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este un inel comutativ și unitar. Mai mult, oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(M)$, avem $A + A = \emptyset$.

(elementul neutru la adunare) și $A^2 = A$. Să se studieze cazurile particulare în care M este formată din 1, 2, respectiv 3 elemente.

4. Fie A un inel necomutativ unitar și $a \in A$ un element astfel încât există $a' \in A$ cu $a'a = 1$ și $a'a \neq 1$. Fie, de asemenea $M = \{b \in A \mid ba = 1\}$ și $b_0 \in M$. Să se arate că funcția $f: M \rightarrow M$, definită prin $f(b) = ab + b_0 - 1$ este injectivă, dar nu este surjectivă. În particular, să se deducă că M este infinită.

5. Dacă A este un inel astfel încât oricare ar fi $a \in A$, $a \neq 0$, există $b \in A$ cu $ba = 1$, atunci orice element nenul al lui A este inversabil (A este corp).

6. Fie A un inel comutativ cu unitate și $f, g: \mathbf{Q} \xrightarrow[f]{f} A$, două omomorfisme de inele ($f(1) = g(1) = 1_A$). Dacă $f(n) = g(n)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$, atunci $f = g$.

7. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ și $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$. Să se arate că \hat{a} este inversabil $\Leftrightarrow (a, n) = 1$.

8. Fie A un inel. Definim pe A legea de compoziție \perp , punând:

$$x \perp y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că legea \perp este asociativă și are element neutru.

Mai mult, dacă inelul A este unitar și $1 - x$ ($x \in A$) este inversabil, atunci x este simetrizabil față de legea \perp .

9. Fie A un inel pe care definim o nouă lege de compoziție $*$, punând

$$x * y = xy + yx, \text{ oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că:

- a) legea $*$ este comutativă, dar nu și asociativă;
- b) legea $*$ este distributivă față de adunare;
- c) $[(x * x) * y] * x = (x * x) * (y * x)$, oricare ar fi $x, y \in A$.

10. Să se arate că mulțimea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in C \right\},$$

împreună cu legile obișnuite de adunare și înmulțire a matricelor este un domeniu de integritate.

11. Să se arate că, corpul numerelor reale nu este izomorf cu corpul numerelor complexe.

12. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate (adică, nu există $p \in \mathbf{Z}$ astfel

încât $p^2 \mid d$). Să se arate că:

a) mulțimea $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor este un inel comutativ și unitar;

b) mulțimea $I = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ împreună cu adunarea și

înmulțirea obișnuită a matricelor formează un inel comutativ și unitar;

c) cele două inele de la punctele precedente sunt izomorfe;

d) dacă $d' \in \mathbf{Z}$ este un alt număr liber de pătrate, atunci inelele $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ și $\mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$ sunt izomorfe $\Leftrightarrow d = d'$.

13. Prin definiție, un *inel boolean* este un inel în care $x^2 = x$, pentru orice element x (adică, orice element este idempotent). Să se demonstreze că într-un inel boolean înmulțirea este comutativă și $x = -x$, oricare ar fi x din inel. Să se arate că dacă elementele u, x, y ale unui inel boolean sunt astfel încât $x = uxy$, atunci $x = ux$. Mai mult, dacă x și y sunt elemente ale unui inel boolean și $u = x + y + xy$, atunci $x = ux$ și $y = uy$.

În general, să se arate că, pentru orice n elemente x_1, x_2, \dots, x_n ale unui inel boolean, există un element u al inelului astfel încât $x_1 = ux_1, x_2 = ux_2, \dots, x_n = ux_n$.

14. Fie A_1 și A_2 două inele unitare și fie adunarea și înmulțirea pe $A_1 \times A_2$, definite astfel:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Să se arate că $A_1 \times A_2$, cu aceste operații, este un inel unitar care are divizori ai lui zero. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel în funcție de elementele inversabile ale inelelor A_1 și A_2 .

Aplicație

a) $A_1 = A_2 = \mathbf{Z}$; b) $A_1 = \mathbf{Z}, A_2 = \mathbf{Q}$; c) $A_1 = \mathbf{Z}_m, A_2 = \mathbf{Z}_n$.

15. Fie $m, n > 1$, numere naturale prime între ele și inelele

$$\mathbf{Z}_m = \left\{ \overset{\wedge}{0}, \overset{\wedge}{1}, \dots, \overset{\wedge}{m-1} \right\}, \mathbf{Z}_n = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1} \right\},$$

$$\mathbf{Z}_{mn} = \left\{ \overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}}, \dots, \overline{\overline{mn-1}} \right\}.$$

Să se arate că:

a) Dacă $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, atunci $\left(\hat{x}, \overline{\overline{x}} \right) = \left(\hat{y}, \overline{\overline{y}} \right)$;

b) Funcția $\varphi : \mathbf{Z}_{mn} \rightarrow \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, definită prin $\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x})$ este un

izomorfism de inele (vezi pct. c) al problemei precedente).

16. Să se descrie omomorfismele de inel de la \mathbf{Z} la \mathbf{Z} .

17. Să se descrie omomorfismele de inel de la \mathbf{Z} la \mathbf{Z}_n .

18. Să se descrie omomorfismele de inel de la \mathbf{Z}_m la \mathbf{Z}_n .

19. Fie ecuația $\hat{a}x = \hat{b}$, cu \hat{a}, \hat{b} din inelul \mathbf{Z}_n al claselor de resturi modulo n . Să se arate că:

i) Dacă $(a, n) = 1$, ecuația are o soluție unică;

ii) Dacă $(a, n) = d > 1$ și d nu divide b , ecuația nu are nici o soluție;

iii) Dacă $(a, n) = d > 1$ și $d \mid b$, atunci ecuația are d soluții distincte.

20. Fie A un inel comutativ și unitar, astfel încât să existe $u \in A$, $u \neq 0$ și $u \neq 1$, cu $u^2 = u$. Fie

$$A_1 = \{ux \mid x \in A\}.$$

Să se demonstreze că A_1 este un subinel al lui A (adică, oricare ar fi $x, y \in A_1$, atunci $x - y \in A_1$ și $xy \in A_1$) care are unitate. Să se demonstreze, apoi, că există un subinel A_2 al lui A astfel încât:

a) A_2 este unitar; b) fiecare element al lui A se exprimă ca $x_1 + x_2$ unde $x_i \in A_i$, $i = 1, 2$; c) dacă $x_1 \in A_1$ și $x_2 \in A_2$, atunci $x_1 x_2 = 0$;

d) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Să se arate că funcția

$$f: A \rightarrow A_1 \times A_2, f(x) = (x_1, x_2), \text{ unde } x = x_1 + x_2$$

este un izomorfism de inele.

21. Fie A un inel și \mathbf{Z} inelul numerelor întregi. Considerăm $A_1 = \mathbf{Z} \times A$ pe care definim adunarea și înmulțirea astfel:

$$(n, a) + (n', a') = (n + n', a + a'),$$

$$(n, a) \cdot (n', a') = (nn', na' + n'a + nn'),$$

pentru orice $(n, a), (n', a') \in A_1$. Să se arate că:

a) A_1 este un inel subunitar;

b) A este izomorf cu un subinel al lui A_1 ;

c) dacă A este un inel comutativ, atunci A_1 este comutativ. Pentru $x, y \in A$; fie $x \circ y = x + y - xy$.

Să se arate că operația \circ este asociativă și că $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, pentru orice $x \in A$. Identificând elementele corespunzătoare prin izomorfismul de la pct. b), să se arate că dacă $x \in A$, atunci x este simetrizabil în (A, \circ) dacă și numai dacă $1 - x$ este simetrizabil în A_1 .

22. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$a) \begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1}, \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2}; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{2}, \\ \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{3}; \end{cases}$$

cu coeficienți în inelul \mathbf{Z}_{12} .

23. Să se determine

a) Matricele $X \in M_2(\mathbf{Z}_2)$ astfel încât $X^2 + I_2 = O_2$, unde O_2 este matricea nulă și I_2 matricea unitate.

b) Matricele $X \in M_2(\mathbf{Z}_3)$ astfel încât $X^2 = I_2$, unde I_2 este matricea unitate.

24. Fie A un inel și

$$Z(A) = \{x \in A \mid xa = ax, \text{ oricare ar fi } a \in A\}.$$

Să se arate că dacă $a^2 - a \in Z(A)$, oricare ar fi $a \in A$, atunci inelul este comutativ.

25. Să se determine numărul structurilor de inel, neizomorfe, care pot fi definite pe o mulțime cu un număr prim de elemente.

26. Fie inelul $\mathbf{Z}[i] = \{m + ni \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ (numit *inelul întregilor lui Gauss*). Definim funcția

$$\varphi : \mathbf{Z}[i] \rightarrow \mathbf{N}, \varphi(m + ni) = m^2 + n^2,$$

Să se arate că:

$$a) \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$b) \varphi(zz') = \varphi(z) \varphi(z'), \text{ oricare ar fi } z, z' \in \mathbf{Z}[i];$$

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[i]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ astfel încât $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$ (formula împărțirii cu rest);

$$d) \varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z \text{ este inversabil} \Leftrightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}.$$

27. Fie inelul $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}] = \{m + ni\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcția

$$\varphi : \mathbf{Z}[i\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{N}, \varphi(m + ni\sqrt{2}) = m^2 + 2n^2.$$

Să se arate că:

$$a) \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$b) \varphi(zz') = \varphi(z) \varphi(z'), \text{ oricare ar fi } z, z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}];$$

c) Dacă $z, z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ astfel încât $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

$$d) \varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z \text{ este inversabil} \Leftrightarrow z \in \{-1, 1\}.$$

28. Fie inelul $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcția

$$\varphi : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{N}, \varphi(m + n\sqrt{2}) = |m^2 + 2n^2|.$$

Să se arate că: a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z) \varphi(z')$, oricare ar fi $z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

c) Dacă $z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $z' \neq 0$, există $q, r \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ astfel încât $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ are o infinitate de elemente inversabile.

29. Să se arate că inelul \mathbb{Z}_n este corp dacă și numai dacă n este prim.

30. Să se arate că orice inel integru finit este corp.

31. Să se arate că mulțimea

$$K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor reale este un corp comutativ.

32. Pe intervalul $K = (0, +\infty)$ se definesc operațiile algebrice:

$$x \oplus y = xy \text{ și } x \odot y = x^{\ln y}, \text{ oricare ar fi } x, y \in K. \text{ Să se arate că:}$$

I) (K, \oplus, \odot) este un corp comutativ.

II) Corpul (K, \oplus, \odot) este izomorf cu corpul \mathbb{R} al numerelor reale.

33. Să se determine automorfismele corpului \mathbb{Q} al numerelor raționale.

34. Să se determine automorfismele corpului \mathbb{R} al numerelor reale.

35. Să se determine automorfismele f , ale corpului \mathbb{C} al numerelor complexe, cu proprietatea că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

36. Fie $d \in \mathbb{Z}$ un număr liber de pătrate. Să se arate că :

a) mulțimea $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe este un corp comutativ;

b) mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ împreună cu adunarea și în-

mulțirea matricelor formează un corp comutativ;

c) cele două corpuri de la punctele precedente sunt izomorfe.

37. Fie K un corp comutativ și $K^* = K \setminus \{0\}$. Să se arate că grupurile $(K, +)$ și (K^*, \cdot) nu sunt izomorfe.

38. Fie K un corp comutativ având proprietatea că, pentru orice $x \in K$ avem $x^2 + 1 \neq 0$. Definim adunarea și înmulțirea pe $K \times K$, punând

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \times K$.

Să se arate că mulțimea $K \times K$, împreună cu aceste operații, este un corp comutativ, corpul K fiind izomorf cu un subcorp al acestuia. Mai mult, în acest corp ecuația $x^2 + 1 = 0$ are soluții. Există corpuri K finite cu proprietatea că $x^2 + 1 \neq 0$, oricare ar fi $x \in K$?

39. Să se determine rangul matricei

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & -\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \alpha & \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{Z}_5).$$

Discuție după $\alpha \in \mathbf{Z}_5$.

40. Să se determine $\alpha \in \mathbf{Z}_3$ astfel încât matricea

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \alpha \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \alpha & \hat{1} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z}_3).$$

să fi inversabilă. În acest caz să se afle inversa.

41. Fie corpul \mathbf{Z}_3 și mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbf{Z}_3 \right\}$$

Să se arate că G împreună cu înmulțirea matricelor este un grup ne-comutativ. Câte elemente are acest grup?

42. Să se rezolve sistemele de ecuații :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \hat{2}x + y + z = \hat{4}, \\ x + y - z = \hat{0}, \\ \hat{4}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{3}; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y + z = \hat{1}, \\ \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{1}, \\ -x - y + \hat{3}z = \hat{1}, \end{cases} \end{array}$$

cu coeficienți în \mathbf{Z}_5 .

43. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (\hat{3}\alpha - \hat{2})x_1 + (\alpha - \hat{1})x_2 + (\alpha + \hat{4})x_3 + \alpha x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + (\alpha + \hat{4})x_2 + (\alpha - \hat{1})x_3 + (\alpha + \hat{3})x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + (\hat{2}\alpha + \hat{1})x_3 + (\hat{2}\alpha - \hat{1})x_4 = \hat{1}. \end{cases}$$

cu coeficienți în \mathbf{Z}_5 .

44. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y + \hat{3}z = \hat{2} \\ \hat{6}x + \hat{4}y + \hat{2}z = \hat{6} \\ \hat{3}x + \hat{2}y + \hat{4}z = \hat{3} \end{cases}$$

în inelul \mathbf{Z}_{12} .

45. Să se deducă în corpul \mathbf{Z}_p ($p \neq 2$, număr prim) formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbf{Z}_p, a \neq 0).$$

46. Fie polinoamele:

a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$;

b) $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$;

c) $X^5 + 1 \in \mathbf{Z}_3[X]$;

c) $X^4 - 1 \in \mathbf{Z}_7[X]$.

Să se decidă dacă polinoamele date sunt sau nu reducibile, iar în acest caz afirmativ să se descompună în factori primi.

47. Să se determine a astfel încât polinomul

$$\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X] \text{ să fie ireductibil.}$$

48. Să se arate că polinomul $X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbf{Z}_7[X]$ este reducibil pentru orice $a \in \mathbf{Z}_7$.

49. Să se determine numărul structurilor de inel unitar care pot fi definite pe grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$ și să se arate că oricare două astfel de inele sunt izomorfe.

50. Fie p un număr prim, $p > 2$ și $n = p^k$, $k \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se determine elementele $x \in \mathbf{Z}_n$ pentru care $x^2 = \hat{1}$;

b) Să se arate că produsul elementelor inversabile din inelul \mathbf{Z}_n este $-\hat{1}$;

c) Să se arate că $\frac{(p^2)!}{p!} + p^p$ se divide cu p^{p+2} .

51. Fie A un inel comutativ și unitar. Un element $a \in A$ se numește *nilpotent* dacă există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $a^n = 0$. Să se arate că suma dintre un element inversabil și un element nilpotent este element inversabil în A .

52. Fie A un inel comutativ și unitar. Să se arate că un polinom $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ din $A[X]$ este inversabil în $A[X]$ dacă și numai dacă a_0 este

inversabil în A și a_1, a_2, \dots, a_n sunt elemente nilpotente.

53. Fie A un inel comutativ și $f \in A[X]$. Să se arate că f este divizor al lui zero în $A[X]$ dacă și numai dacă există $a \in A, a \neq 0$, astfel încât $af = 0$.

54. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ și p un număr natural prim astfel încât p nu divide a_n . Să se arate că dacă

$$\hat{f} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X + \dots + \hat{a}_nX^n \in \mathbb{Z}_p[X]$$

este ireductibil, atunci f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

55. Fie polinomul $f(X) = aX^4 + bX^2 + cX^2 + dX + e$ cu coeficienți întregi astfel încât a, b, e sunt numere impare, iar c, d sunt pare. Să se arate că $f(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

56. Fie K un corp comutativ. Notăm cu $GL_n(K)$ mulțimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din K . Să se arate că:

- $GL_n(K)$ împreună cu înmulțirea matricelor este un grup;
- dacă K este un corp finit având q elemente, atunci $GL_n(K)$ are $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1})$ elemente;
- $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ este izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente.

57. Să se arate că inelele de polinoame $\mathbb{R}[X]$ și $\mathbb{C}[X]$ nu sunt izomorfe.

58. Fie A un inel, nu neapărat comutativ, astfel încât, dacă $x^n = 0$ pentru un oarecare $x \in A$ și $n \in \mathbb{N}$, atunci $x = 0$. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ astfel încât $x_1 x_2 \dots x_n = 0$, atunci:

- oricare ar fi $i, x_1 \dots x_n x_1 \dots x_{i-1} = 0$;
- oricare ar fi $a_1, a_2, \dots, a_k \in A, k \leq n - 1$, să se arate prin inducție după k , că avem $x_1 a_1 x_2 a_2 \dots a_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_n = 0$;
- oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, avem $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} = 0$.

Capitolul XXI

PROBLEME PENTRU CONCURSURILE DE MATEMATICĂ

1. Fie șirul de mulțimi și funcții:

$$\dots \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_4} A_1 \xrightarrow{f_3} A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0.$$

Dacă mulțimile A_i sunt finite, oricare ar fi $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, există un șir de elemente $(x_n)_{n \geq 0}$, unde $x_n \in A_n$ ($n \geq 0$), cu proprietatea că $f_n(x_n) = x_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

2. Fie $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție cu proprietatea :

(1) $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in [0, 1]$.

Să se arate că $f \circ f = f$.

Să se dea exemplul de funcție cu proprietatea (1) care să fie diferită de funcția nulă și de cea identică.

3. Fie a, b, α, β numere reale și $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, o funcție oarecare. Dacă $\alpha^2 \neq \beta^2$ să se determine funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât să avem

$$\alpha f(a+x) + \beta f(b-x) = g(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

4. Fie a_0 un număr natural. Definim mulțimea

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \text{ unde } a = \sqrt{a_0^2 + 1}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}.$$

Să se arate că mulțimea $A \setminus \mathbf{Q}$ este infinită.

5. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}]^2 \text{ este impar.}$$

6. Să se determine mulțimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ și } \sqrt{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z}\}.$$

7. Fie k un număr real. Să se determine valorile lui k , astfel încât ecuația

$$|x+1| - |x-1| = kx + 1$$

să aibă soluție unică.

8. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$, să se arate că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

9. Dacă $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, să se arate că

$$\max \{x, y, z\} - \min \{x, y, z\} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2 - 3b}.$$

10. Să se arate că, dacă $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$, atunci $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$, m și $n \neq 0$ fiind numere naturale.

11. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale astfel încât $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Să se arate că

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \frac{a_{k+1} + \dots + a_n}{n-k}.$$

12. Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural n , astfel încât

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq n(x^4 + y^4 + z^4),$$

oricare ar fi numerele reale x, y, z .

13. Dacă $m \leq n$ sunt numere naturale nenule, să se calculeze

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \max(i, k).$$

14. Să se calculeze

$$S = \sum_{k=1}^{n^2} \left[\sqrt{k} \right].$$

15. Să se determine toate numerele reale m , astfel încât să avem

$$(m-1)x^2 - mx - 2 > 0,$$

oricare ar fi $x > 2$, real.

16. Numerele a, b, c din \mathbf{R} sunt astfel încât $|ax^2 + bx + 1| \leq 1$ pentru $|x| \leq 1$. Să se demonstreze că $|cx^2 - bx + a| \leq 2$ pentru $|x| \leq 1$.

17. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât ecuația

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b} + \sqrt{x} = c$$

să aibă o infinitate de soluții.

18. Să se determine numerele reale a, b astfel încât ecuația

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

să aibă soluție unică.

19. Să se rezolve în \mathbf{R} , sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right), \\ x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right), \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right), \\ x_1 = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right). \end{cases} \quad (a > 0)$$

(Generalizare a problemei 126., cap. V)

20. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale pozitive. Să se arate că

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}.$$

21. Să se demonstreze că, pentru $x \geq 1$, avem

$$[\log_2 x - \log_2 [x]] = [\log_2 x] - [\log_2 [x]].$$

22. Fie numerele pozitive $a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$, în progresie aritmetică crescătoare. Să se arate că

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_0 a_{2n}}.$$

23. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ având proprietățile următoare:

a) $f(2) = 2$; b) $f(mn) = f(m)f(n)$, oricare $m, n \in \mathbb{N}$; c) $f(m) > f(n)$, dacă $m > n$. Să se arate că $f = 1_{\mathbb{N}}$.

24. Fie M o mulțime cu n elemente. Considerăm ecuațiile:

$$\begin{aligned} X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k &= M, \\ X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k &= \emptyset, \end{aligned}$$

unde $k \geq 1$ este un număr natural, iar X_1, X_2, \dots, X_k sunt submulțimi ale lui M .

Să se demonstreze, prin inducție, că numărul soluțiilor (X_1, X_2, \dots, X_k) ale problemei (1), respectiv ale ecuației (2), este egal cu $(2^k - 1)^n$ (vezi problema 33, cap. X).

25. La o bibliotecă există două registre. Fiecare cititor înscrie în primul registru numărul de cititori pe care i-a întâlnit în sala de lectură și în al doilea înscrie numărul de cititori care au rămas după plecarea lui. Să se arate că la ora închiderii în cele două registre sunt înscrise aceleași numere, eventual în altă ordine.

26. Să se demonstreze că, dacă $n > 2$ este un număr natural, atunci 2^{2^n} divide pe $C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$.

27. Să se decidă care dintre numerele $5^{\sqrt{6}}$ și $6^{\sqrt{5}}$ este mai mare.

28. Să se arate că primele 100 de cifre după virgulă ale numărului $(\sqrt{26} + 5)^{101}$ sunt toate zero.

29. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m C_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

30. La o serbare participă b băieți și f fete. Se știe că orice grup de m băieți cunoaște cel puțin m fete ($m < b, f$). Să se arate că există posibilitatea ca fiecare băiat să danseze cu o fată pe care o cunoaște.

31. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n , astfel încât $n \mid 2^n + 1$.

32. Să se determine toate numerele prime p , cu proprietatea că $p \mid 2^p + 1$.

33. Să se arate că oricare ar fi n avem n nu divide $2^n - 1$.

34. Să se arate că oricare ar fi $p > 2$, număr prim, există o infinitate de numere naturale n , astfel încât $p \mid n \cdot 2^n + 1$.

35. Să se arate că șirul $\{2^n - 3\}_n$ are o infinitate de termeni care se divid cu 5, o infinitate de termeni care se divid cu 13, dar nici un termen al său nu se divide cu $5 \cdot 13$.

36. Fie a, b, c, d, e numere întregi. Să se arate că, dacă $9 \mid a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$, atunci $3 \mid abcde$.

37. a) Fie a, b numere întregi cu $a \neq b$. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $(a + n, b + n) = 1$; b) Fie a, b, c numere întregi distincte. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n , astfel încât $a + b, b + n, c + n$ să fie prime între ele două câte două.

38. Să se arate că, dacă p este un număr prim ≥ 2 , atunci $p \mid C_{2p}^p - 2$.

39. Să se determine numerele naturale x_1, x_2, \dots, x_9 astfel încât

$$3^{x_1} + 3^{x_2} + \dots + 3^{x_9} = 19683.$$

40. Să se arate că dacă $n \geq 1$ numărul $2^{2^{n+1}} + 3$ nu este prim.

41. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci

$$11 \mid 2^{2^{4n+2}} + 7.$$

42. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci

$$29 \mid 2^{2^{6n+2}} + 13.$$

43. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$3^x + 4^x = y^2,$$

în mulțimea numerelor întregi.

44. Fie polinoamele $p(X) = aX^2 + bX + c$ și $q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ cu coeficienți reali astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să avem $q(p(x)) = x$. Să se determine $p(q(X))$.

45. Să se determine toate polinoamele cu coeficienții $+1$ și -1 , care au numai rădăcini reale.

46. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere întregi distincte, să se arate că polinomul

$$(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n) + 1$$

nu se poate scrie ca produsul a două polinoame neunitare cu coeficienți întregi.

47. Fie polinoamele $P(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{m-1}$, $Q(X) = X^{u_1} + X^{u_2} + \dots + X^{u_n}$, unde $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$ sunt numere întregi.

Pentru $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, fie n_k numărul acelor i ($1 \leq i \leq n$),

pentru care restul împărțirii lui a_i la m este k . Să se demonstreze că $P(X)$ divide $Q(X)$ dacă și numai dacă $n_0 = n_1 = \dots = n_{m-1}$.

48. Fie $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom de grad ≥ 1 . Să se că mulțimea divizorilor primi ai numerelor $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, este infinită.

49. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n , notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiuni al lui σ . Să se calculeze suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma).$$

50. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice cu 4 linii și 7 coloane astfel încât $a_{ij} \in \{0, 1\}$, oricare ar fi i, j . Să se arate că există $m < n$ și $p < q$ astfel încât $a_{mp} = a_{nq} = a_{np} = a_{mq}$.

51. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Să se determine cel mai mare termen al dezvoltării binomului $(a + b)^n$.

52. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1327 & 1443 & 2899 \\ 4303 & 4174 & 1599 \\ 1716 & 1352 & 1704 \end{pmatrix}.$$

Să se decidă dacă $\det A$ este nenul.

53. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^2 = A^3$ și $A + B = I_n$. Să se arate că $I_n + AB$ este inversabilă, unde I_n este matricea unitate din $M_n(\mathbb{C})$.

54. Fie G un grup și H, K două subgrupuri ale sale. Să se arate că, dacă există $a, b \in G$ astfel încât $aH = bK$, atunci $H = K$.

55. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ și $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nu sunt izomorfe.

56. Fie G un grup astfel încât singurul automorfism al său să fie cel identic. Să se arate că G este comutativ și oricare ar fi $x \in G$, $x^2 = e$.

57. Fie H un subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Q}, +)$ al numerelor raționale. Să se arate că, dacă $\mathbb{Q} = H + \mathbb{Z}$ (unde $H + \mathbb{Z} = \{h + n \mid h \in H, n \in \mathbb{Z}\}$), atunci $H = \mathbb{Q}$.

58. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

59. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^2 = e$, $aba^{-1} = b^n$, unde $n \geq 2$ este un număr natural.

Să se arate că

$$b^{n^2-1} = e.$$

60. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^m = e$, $aba^{-1} = b^k$, unde

$m \geq 1$ și $k \geq 2$ sunt numere naturale. Să se arate că $b^{k^m-1} = e$.

61. Dacă G este un grup abelian, să se determine morfismele de grup de la grupul de permutări S_n la G ($n \geq 1$).

62. Fie G un grup finit cu cel puțin două elemente și $S \subset G$ un sistem minimal (în sensul cardinalului) de generatori ai săi. Să se arate că $\text{ord}(G) \geq 2^{|S|}$, unde $|S|$ înseamnă numărul de elemente al lui S . (S este un sistem de generatori ai lui G dacă orice element din G este produs finit de elemente și de inverse de elemente din S).

63. Pe mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale considerăm distanța $d: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $d(x, y) = |x - y|$. Numim izometrie a lui \mathbf{R} o funcție bijectivă $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Vom nota cu $\text{Izom}(\mathbf{R})$ mulțimea izometriilor lui \mathbf{R} .

i) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcția $\tau_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\tau_a x = x + a$. Să se arate că τ_a este o izometrie (care se numește *translație*), $\tau_1^n = \tau_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

ii) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcția $\varepsilon_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\varepsilon_a x = a - x$. Să se arate că ε_a este o izometrie (care se numește *reflexie*), iar $\varepsilon_a^2 = 1_R$, $\varepsilon_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \varepsilon_a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

iii) Să se arate că orice izometrie a lui \mathbf{R} este o translație sau o reflexie;

iv) Să se arate că $(\text{Izom}(\mathbf{R}), \circ)$ este un grup necomutativ.

Mai mult, dacă notăm $T = \{\tau_a\}_{a \in \mathbf{R}}$, să se arate că (T, \circ) este un subgrup al grupului $(\text{Izom}(\mathbf{R}), \circ)$ și este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbf{R}, +)$ al numerelor reale.

64. În definiția unui inel (nu neapărat comutativ) cu unitate, să se arate că axioma de comutativitate a operației de adunare este o consecință a celorlalte axiome ale inelului.

65. Fie A un inel (necomutativ) cu unitate, iar $a, b \in A$. Să se arate că, dacă $1 - ab$ este inversabil, atunci și $1 - ba$ este inversabil.

66. Fie A un inel cu unitate și $a, b \in A$ astfel încât $a, b, ab - 1$ sunt inversabile. Să se arate că elementele $a - b^{-1}$ și $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ sunt inversabile. Mai mult, are loc egalitatea

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a.$$

67. Fie K un corp (comutativ sau nu), iar K_1, K_2, K_3 subcorpuri ale lui K astfel încât $K_i \neq K$ oricare ar fi $i = \overline{1, 3}$. Să se arate că $\bigcup_{i=1}^3 K_i \neq K$.

68. Fie K și K' două corpuri comutative și $\varphi: K \rightarrow K'$ o aplicație

astfel încât $\varphi(1) = 1$. Să se arate că φ este omomorfism de corpuri dacă și numai dacă:

i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$;

ii) $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, oricare ar fi $x \in K, x \neq 0$.

69. Fie H mulțimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Să se arate că H , înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor, este un corp necomutativ. Mai mult, ecuația $x^2 + I_4 = 0$ are o infinitate de soluții în H .

70. Fie $M_2(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul al doilea cu elemente din \mathbb{C} . Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că :

i) $[A, B]^2$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$.

ii) Dacă $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{C})$, atunci matricea $[A, B][C, D] + [C, D][A, B]$ comută cu orice matrice din $M_2(\mathbb{C})$.

71. Fie A un inel unitar cu proprietatea că $x^6 = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

72. Fie A un inel unitar cu proprietatea că $x^{12} = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

73. Fie A un inel astfel încât $x^3 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

i) Să se calculeze $(x^2yx^2 - x^2y)^2$ și $(x^2yx^2 - yx^2)^2$, unde $x, y \in A$;

ii) Să se arate că A este inel comutativ.

Partea a II-a
INDICAȚII. SOLUȚII. RĂSPUNSURI

Capitolul I
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) falsă; e) adevărată; f) falsă; g) adevărată. 2. a) adevărată; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) adevărată; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) adevărată; j) falsă; k) falsă. 5. a) adevărată; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) falsă; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) falsă. 6. Se arată că propoziția $(\forall y) (\exists x) p(x, y)$ este adevărată și propoziția $(\exists x) (\forall y) p(x, y)$ este falsă. 7. La fel ca la exercițiul 6. 8. a) adevărată; falsă; adevărată; falsă; falsă; falsă; b) falsă; adevărată; adevărată; adevărată. 9. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) adevărată; e) falsă.

Capitolul II
MULȚIMI

1. a) $\{7\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-1, 2\}$ d) $\{-1\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; f) $\{1\}$; g) \emptyset ; h) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$; i) $\{-1 + \sqrt{6}, 3\}$; j) \emptyset ; k) $\{-2, 1, 3\}$; l) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; m) \emptyset ; n) $\{0, 3\}$; p) $\{1\}$; q) $[4, +\infty)$. 2. $A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. 3. a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $E = \{3, 4\}$. 4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$. 5. $A = \{1, 2, 3, 9\}$, $B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$. 7. Sunt toate submulțimile mulțimii $\{b, d, e\}$, deci în total 8 submulțimi. 8. $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. 9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 10. $X = \{3, 5, 7, 9\}$. 11. $X = \{4, 5, 6\}$. 12. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$. 15. Sunt 9 soluții. 16. Folosim complementara $C_E \emptyset = C_E(X \cap Y) \Rightarrow E = C_E X \cup C_E Y$ și revenim la problema 15. 17. a) $\{-7, 1, 5, 13\}$; b) $B = \{3\}$. 18. Scriem $x = 2n - 1 + \frac{n+8}{3n+1}$. Trebuie ca $3n + 1$ să dividă pe $n + 8$. Deci $3n + 1$ divide $3(n + 8) - (3n + 1) = 23$. Deci $3n + 1 = \pm 1$; $3n + 1 =$

$= \pm 23$. Obținem $A = \{-17, 7\}$. 19. Avem $a^2 - a + 1 = ax + x \Rightarrow a^2 - a(1 + x) + 1 - x = 0$. Punem condiția ca $\Delta = (1 + x^2) - 4(1 - x) \geq 0$. Obținem că mulțimea dată este egală cu $\left(-\infty, -3 - 2\sqrt{3}\right] \cup \left[-3 + 2\sqrt{3}, +\infty\right)$.

20. $x = 3 + \frac{6n-2}{n^2+1}$. Dacă $n \geq 6$, atunci avem $n^2 + 1 > 6n - 2$. Deci trebuie

ca $n \leq 5$. Obținem $A = \{1, 5\}$. 21. $\{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\}$. 22. $y = 2 - x$ și obținem ecuația $|x| - 2|2 - x| = -1$, $A = \{(5, -3); (1, 1)\}$.

23. Fie $d = (a, b)$; $a = da'$; $b = db'$, unde a' și b' sunt numere prime între ele; $ab = d^2 a' b' = 144 a' b' \Rightarrow a' b' = 15 \Rightarrow a' = 1, b' = 15; a' = 3, b' = 5; a' = 5, b' = 3; a' = 15, b' = 1$. Deci $A = \{(12, 180), (30, 60), (60, 36), (180, 12)\}$.

24. Scriem $(3y - (x + 1))(3y + (x + 1)) = 32$. Rezultă că $3y - (x + 1)$ poate lua valorile 1, 2, 4. Deci $3y + (x + 1)$ ia valorile 32, 16, 8. Mulțimea căutată este: $\{(6, 3), (1, 2)\}$. 25. Este intervalul $(1, 2)$. 26. Scriem $(x - y)^2 + 2y^2 = 8$. Obținem că $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$. Mulțimea căutată este $\{(-2, -2),$

$(2, 2)\}$. 28. Scriem $3y = 1980 - x \Rightarrow y = 660 - \frac{x}{3} \Rightarrow y = 660 - k$, unde

$0 \leq k \leq 660$. Deci mulțimea dată are 661 elemente. 29. $3y = 1980 - 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 660 - 4\frac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow y = 660 - 4k$. Cum $y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 4k \leq 660 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq 165$. Deci mulțimea dată are 166 elemente. 30. $\{(0, 1976), (494, 494), 1976, 0)\}$. 31. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + m =$

$= 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$. Cum $A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}$, avem singurele posibilități $x_1 = -1, x_2 = 4$ sau $x_1 = 1, x_2 = 2$. Deci $m = -4$ sau $m = 2$. Rezultă $n = -3,$

$p = 2$ sau $n = -3$ și $p = -4$. 32. $a = -1$ și $a = -\frac{1}{4}$. Pentru $a = -1$ avem

$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{5}{8}\right\}$, iar pentru $a = -\frac{1}{4}$ avem $\left\{-\frac{1}{20}, 0, \frac{1}{12}\right\}$. 33. $x =$

$= \frac{a^2 + a + m}{a + 1} \Rightarrow a^2 + a(1 - x) + m - x = 0$. Cum $a \in \mathbb{R}$, atunci discrimi-

nantul acestei ecuații trebuie să fie ≥ 0 . Deci $\Delta = x^2 + 2x + 1 - 4m \geq 0$.

Discuție: Dacă $m < 0$ atunci $\Delta > 0$ oricare ar fi x . Deci $A_m = \mathbb{R}, \forall m < 0$.

Dacă $m = 0$ atunci $\Delta = (1 + x^2) \geq 0$. Dar $x = -1$ nu este de forma $\frac{a^2 + a}{a + 1}$,

($a \in \mathbf{R}$). Deci $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$. Dacă $m > 0$, atunci $A_m = (-\infty, -1 - 2\sqrt{m}) \cup (-1 + 2\sqrt{m}, +\infty)$. Se constată ușor că intersecția mulțimilor A_m când m parcurge numerele reale pozitive este vidă. **34.** Dacă mulțimea ar fi nevidă, există fracția ireductibilă $x = \frac{p}{q}$ astfel încât: $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$; deci $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Cum a, b, c sunt impare, din această egalitate rezultă imediat că numerele p și q trebuie să fie pare amândouă. Dar atunci $x = \frac{p}{q}$ nu ar mai fi ireductibilă. **35.** Din egalitatea $x = 3n + 1 = 7m - 1$ se obține că m este de forma $m = 3t + 2$. Deci $x = 21t + 13$. **36.** $x^2 - 4x + m^2 = 0$ are determinantul $\Delta_1 = 16 - 4m^2$; $x^2 - mx + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta_2 = m^2 - 4$; $\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow \Delta_2 < 0$ și în acest caz intersecția este vidă; deci $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, $m = \pm 2$; și în acest caz intersecția este vidă. **37.** În primul caz se arată că $A = \{1, a, b\}$. În al doilea caz se arată că prima ecuație are o rădăcină dublă și cea de a doua are două rădăcini reale de forme diferite de rădăcina primei ecuații. **38.** Se folosește discriminantul celor două ecuații. **39.** Pentru $m = 2$, A are un singur element. **40.** Dacă $m \neq 1, 2$, A are 3 elemente; dacă $m = 1, 2$, A are 2 elemente. **41.** Cele două ecuații au discriminantul strict pozitiv și nu au nici o rădăcină comună. **42.** Dacă -1 este rădăcină, avem $m = -3$; dacă 1 este rădăcină, avem $m = -\frac{1}{3}$. **43. 44. 45. 46.** Se studiază semnul rădăcinilor. **47.** Notăm $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\}$. Se studiază cazurile: 1) $A = \emptyset$, adică $a^2 < b$; atunci $A \cap B = \emptyset$; 2) A are un singur element x_1 ; atunci este necesar și suficient ca $x_1 \in B$. Se obțin pentru (a, b) soluțiile $(0, 0)$; $(1, 1)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; 3) A are două elemente, deci B trebuie să aibă aceleași elemente. Se obțin condițiile $b^2 > a$, $a^2 > b$ și $a = b$. **48.** $X = (A \cap B) \cup (B \cap A)$.

Capitolul III FUNCTII

1. Sunt 6 funcții injective. 2. Sunt 9 funcții. 3. Sunt 12 funcții. 4. Se

înlocuiește x cu $1 - x$ și se obține un sistem de ecuații, care rezolvat dă

$f(x) = -4x + \frac{11}{5}$. 5. Facem $y = x$ și $f(2x) - f(0) = 4x^2$. Punem $f(0) = a$ și

înlocuim x cu $\frac{x}{2}$. Avem $f(x) = a + x^2$. 6. Se face $y = 1$; se obține că f

este o funcție constantă. 7. Se face $x = 0$ și $x = n$ și se obține o contra-

dicție. 8. Nu există. 9. $m = \frac{5}{12}$, $n = \frac{11}{12}$. 10. Nu există. 11. Se înlocuiește

x cu $-x$ și se obține $4f(-x) + 3f(x) = c|x|$. Se formează sistemul de ecua-

ții: $\begin{cases} 4f(x) + 3f(-x) = c|x| \\ 3f(x) + 4f(-x) = c|x| \end{cases}$. Se obține $f(x) = \frac{c}{7}|x|$. 12. $f(x) = x$; $f(x) = -x +$

$+ b$, $b \in \mathbf{R}$. 13. $f^n(x) = a^n x + (a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b)$. 14.

$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 2 \\ x+1, & x < 2 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \geq 2 \\ x+3, & x < 2 \end{cases}$. 15. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$;

$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 2-x, & x < 1 \end{cases}$; $(f \circ g)(x) =$

$= \begin{cases} x, & x \geq 2 \\ 4-x, & x < 2 \end{cases}$. 16. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = n$ oricare ar

fi $n \in \mathbf{N}$. 17. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -8, & x \leq -2 \\ 3x-2, & -2 < x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = -3, \forall x \in \mathbf{R}$.

18. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x+5, & x < -1 \\ x^2+2x+4, & x \geq -1 \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x^2+4, & x \geq 0 \end{cases}$.

19. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \leq 3 \\ x-1, & x > 3 \end{cases}$. 20. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 4 \\ \frac{x+2}{3}, & x < 4 \end{cases}$.

21. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 1 \\ \frac{x+7}{2}, & x > 1 \end{cases}$. 22. a) f nu este injectivă deoarece $f(0) = f(5)$;

b) f nu este injectivă deoarece $f(0) = f(7)$; c) $f(x) = x(x^2 - 3x + 2) - 4$ și se vede că $f(0) = f(1) = f(2)$; $f(x) = x^{1979}(x^2 - 4) + 1 \Rightarrow f(0) = f(2) = f(-2)$.

24. $f(x) = x^3(2x + 3) + 4 \Rightarrow f(0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f$ nu este injectivă; $g(x) =$
 $= g(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y \Rightarrow g$ injectivă. 25. a) $m = 2$; b) $f(1) = f\left(\frac{5}{2}\right) =$
 $= 2, f$ nu este injectivă. 26. Avem că $f_{m,n}$ este injectivă dacă $m \geq 0$ și $n > 0$; $f_{m,n}$
este surjectivă dacă $m \leq 0$ și $n > 0$; $f_{m,n}$ este bijectivă pentru $m = 0$ și $n > 0$.
27. I) Dacă îl scriem pe a în baza 10 atunci b este ultima cifră; II) dacă $a =$
 $= 0$ atunci luăm $n_0 = 1$; $a = 1$ luăm $n_0 = 1$; $a = 2$ luăm $n_0 = 4$; $a = 3, n_0 =$
 $= 4$; $a = 4, n_0 = 2$; $a = 5, n_0 = 1$; $a = 6, n_0 = 1$; $a = 7, n_0 = 4$; $a = 8, n_0 = 4$;
 $a = 9, n_0 = 2$. 28. Presupunem că $f \neq 1_A \Rightarrow (\exists) a \in A, f(a) = b$ cu $a \neq b$.
Fie $c \in A, c \notin \{a, b\}$. Considerăm funcția $g : A \rightarrow A, g(a) = a, g(b) = c,$
 $g(c) = b$ și $g(x) = x, \forall x \notin \{a, b, c\}$; $(g \circ f)(a) = c$ și $(f \circ g)(a) = b$ rezul-
tă $g \circ f \neq f \circ g$. 29. a) $f([-1, 1]) = [-1, 3], f([-2, 0]) = [-3, 1], f([-2, 1]) =$
 $= (-3, 3], f([1, 2]) = (3, 5)$. b) $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}; f([1, 3]) = f([1, 2] \cup$
 $\cup [2, 3]) = f([1, 2]) \cup f([2, 3]) = [1, 2]; f([-1, 3]) = [1, 4]; f([1, +\infty)) =$
 $= [1, +\infty]; f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x < -2, f([0, 1]) = \{2\}; \\ 2, & -2 \leq x \leq 1, f([-2, 1]) = \{2\}; \\ 2x, & x > 1; f([-3, 2]) = [2, 4] \end{cases}$

injectivă. Fie $b \in f(X) \cap f(Y)$; atunci $b \in f(X)$ și $b \in f(Y)$. Există $x \in X$ și
 $y \in Y$ astfel încât $b = f(x) = f(y)$. Cum f este injectivă, atunci $x = y$ și deci
 $x \in X \cap Y$; deci $b \in f(X \cap Y)$. Deci $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Cum $f(X \cap$
 $\cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$, obținem egalitatea $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$. Reciproc,
presupunem $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ oricare ar fi submulțimile X, Y ale lui
 A . Fie $x, y \in A$ astfel încât $f(x) = f(y)$. Notăm $X = \{x\}, Y = \{y\}$; rezultă
 $f(X) = \{f(x)\}$ și $f(Y) = \{f(y)\}$, de unde obținem $f(X \cap Y) \neq \emptyset$. Deci $X \cap Y \neq \emptyset$
și deci $x = y$, adică f este injectivă. 31. a) Presupunem funcția f injectivă.
Fie $b \in f(CA')$. Atunci există $a \in CA'$ astfel încât $b = f(a)$. Deci $a \notin A'$.
Dacă $b \in f(A')$ atunci există $a' \in A'$ cu $b = f(a')$. Cum f este injectivă, $a =$
 $= a'$ și deci $a \in A'$, contradicție. Deci $b \notin f(A')$, adică $b \in Cf(A')$. Deci
 $f(CA') \subset Cf(A')$. Reciproc, fie $x \neq y$. Notăm $A' = \{x\}$. Deci $y \in CA'$ și
deci $f(y) \in f(CA') \subset Cf(A')$ de unde $f(y) \notin f(A')$; cum $f(A') = \{f(x)\}$
obținem $f(y) \neq f(x)$ și deci f este injectivă. 32. a) Presupunem f injectivă.

Fie $f_*(A') = f_*(A'')$ unde $A', A'' \in P(A)$. Avem $f(A') = f(A'')$. Fie $x \in A' \Rightarrow f(x) = f(A') \Rightarrow f(x) = f(A'') \Rightarrow (\exists) y \in A''$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow x \in A' \Rightarrow A' \subset A''$. Analog se arată că $A'' \subset A'$. Deci f_* este injectivă. Fie $f(x) = f(y)$, $x, y \in A$. Dacă $A' = \{x\}$, $A'' = \{y\} \Rightarrow f_*(A') = f_*(A'')$. Deci $A' = A'' \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injectivă. b) și c) se demonstrează analog.

$$33. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 0 \\ -2x+1, & x < 0 \end{cases}; \text{ b) } f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [0, 1] \\ x-1, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}.$$

35. Funcția $h: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, definită prin: $h(x) = x$ dacă $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$; $h(0) = 0$ dacă $x \in \mathbf{N}$; $h(x) = \frac{x}{2}$ dacă $x \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ și x par; $h(x) = \frac{x-1}{2}$ dacă $x \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$

și x impar, verifică condițiile din enunț. Un exemplu de astfel de funcție este și $h: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, $h(x) = [x]\{x\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă, iar $\{x\}$ partea fracționară a lui x . 36. Presupunem prin absurd că h este bijectivă și fie p_i , $1 \leq i \leq 5$, numere prime distincte. Există $x_i \in \mathbf{Z}$ astfel încât $h(x_i) = p_i$, $1 \leq i \leq 5$. Deci $f(x_i)g(x_i) = p_i$ și atunci $\exists x_i, x_j \in \mathbf{Z}$, $x_i \neq x_j$, astfel încât $f(x_i) = f(x_j)$, contradicție.

Capitolul IV NUMERE REALE

(Structura algebrică și de ordine a mulțimii numerelor reale)

$$\begin{aligned} 8. \text{ Generalizare. Dacă } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ sunt numere reale } &\Rightarrow \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \\ + \frac{a_3}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)} + \dots + \frac{a_n}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \\ = \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}. \end{aligned}$$

9. Se arată că produsul este egal cu

$$\frac{[c^2 - (a-b)^2][c - (a+b)] + abc}{abc}. \text{ I) Dacă } c = -(a+b), \text{ numărătorul se re-}$$

duce la $9abc$, și deci produsul este 9. II) Dacă $c^2 = (a-b)^2$, numărătorul se reduce la abc , deci produsul este 1. 10. Dacă $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ rezultă că $3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$. Deci unul din factori este neapărat nul. Dacă $b+c=0$, atunci $c=-b$, de unde $c^{2n+1} = -b^{2n+1}$. Fiecare membru al egalității se reduce la a^{2n+1} . 11. II) Din $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ re-

zultă $\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]=0$, de unde $a+b+c=0$

sau $a=b=c$. **12. I)** Înmulțim membru cu membru inegalitățile: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$; **II)** Din $a^2+b^2 \geq 2ab$, rezultă $(a^2+b^2)c \geq 2abc$. Analog, avem $(b^2+c^2)a \geq 2abc$, $(c^2+a^2)b \geq 2abc$. Adunăm, membru cu membru cele trei inegalități. **III)** Din $a^2-ab+b^2 \geq ab$, multiplicând ambii membri cu $a+b$, rezultă $a^3+b^3 \geq (a+b)ab$. Analog, avem $b^3+c^3 \geq (b+c)bc$, $c^3+a^3 \geq (c+a)ca$. Adunăm membru cu membru cele trei inegalități. **13.** Din $a+b+c=1$ vom deduce că,

$$\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}, \quad \frac{1}{b}=\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b} \quad \text{și} \quad \frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1, \quad \text{de unde} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+ \\ +\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 3+2+2+2=9. \text{ Egalitatea va avea loc}$$

pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$. **14.** Se observă că $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}$,

$\frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$ și însumându-le, membru cu membru, se obține inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$. **15.** Deoarece $a+b=2$,

rezultă $a-1=1-b$. Dacă $c=a-1=1-b$, atunci $a=1+c$, $b=1-c$. Inegalitatea de demonstrat devine $(1+c)^4+(1-c)^4 \geq 2$. **16.** Din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi $\Leftrightarrow a+b-c > 0$, $b+c-a > 0$, $c+a-b > 0$. Așadar trebuie demonstrat că au loc cele trei

inegalități de mai înainte $\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4) \Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2 < 0 \Leftrightarrow [a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2] < 0 \Leftrightarrow (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) < 0 \Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b) > 0$. **17.** Din condiția problemei rezultă $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

și $a+b+c \neq 0$. În continuare, se arată că, din egalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$

$$\frac{1}{a+b+c}, \text{ rezultă } (b+c)(c+a)(a+b)=0. \text{ 18. I) } \frac{a^m+b^m}{2} \cdot \frac{a^n+b^n}{2} \leq \\ \leq \frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2} \Leftrightarrow 2(a^{m+n}+b^{m+n})-(a^m+b^m)(a^n+b^n) > 0 \Leftrightarrow (a^m-b^m)(a^n-b^n) \geq 0. \text{ Pentru demonstrarea ultimei inegalități se consideră separat ca-}$$

zurile: 1) m și n impare; 2) m și n pare; **II)** În particular $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq$

$\leq \frac{a^4 + b^4}{2}$ și $\frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^4 + b^4}{2} \leq \frac{a^6 + b^6}{2}$, de unde prin înmulțire membru cu membru se obține inegalitatea cerută. **19.** Avem $(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \geq 0$ și $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$ care ne dau $2abc(a + b + c) \leq a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ și $0 \leq a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$. Adunând membru cu membru ultimele inegalități obținem inegalitatea din enunț. **20.** $\sqrt{(a+c)(b+d)} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \Leftrightarrow (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$.

Avem egalitate dacă $ad = bc$. **21.** Ridicând la pătrat ambii membri și făcând calcule se obține inegalitatea echivalentă $\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 1 - ab$, care ridicată din nou la pătrat este echivalentă cu: $0 \leq (a - b)^2$. Egalitatea are loc pentru $a = b$. **22.** I) $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$; III) Înmulțind cu 2 și trecând totul în membrul al doilea obținem: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (a_i - a_j)^2 \geq 0$. **23.** Fie $m = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i}$ și $M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i}$.

Atunci $m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M$, pentru orice $i (1 \leq i \leq n)$, de unde $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$, ori-

care ar fi i . Însurăm după i și găsim imediat inegalitățile cerute. **24.** Rezultă din problema precedentă. **25.** II) Fie s un număr real pozitiv care îl scriem ca sumă $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ (1). De asemenea,

$s = \underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \dots + \frac{s}{n}}_{(n \text{ ori})}$ (2). Să arătăm că dacă termenii a_1, a_2, \dots, a_n nu sunt

egali între ei, atunci produsul lor este mai mic decât al celor din descompunerea (2). Să presupunem că $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Dacă $a_1 > \frac{s}{n}$,

atunci în mod necesar $a_n < \frac{s}{n}$. Fie diferențele $a_1 - \frac{s}{n}$ și $\frac{s}{n} - a_n$ și să pre-

supunem că $t = \frac{s}{n} - a_n < a_1 - \frac{s}{n}$. Înlocuim în (1) pe a_1 cu $a_1 - t$ și pe a_n cu

$a_n + t = \frac{s}{n}$. Suma termenilor este de asemenea egală cu s , adică $s = (a_1 -$

$- t) + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{s}{n}$, dar conform (I) produsul termenilor crește.

Astfel am ajuns la un termen (ultimul) egal cu $\frac{s}{n}$. Se continuă procedeul

până ajungem că toți termenii trebuie să fie egali cu $\frac{s}{n}$ pentru a avea

produsul maxim. 26. II) $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^3} + \sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) \cdot \left[(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c})^2 + (\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a})^2 \right] \geq 0$. Celelalte inegalități rezul-

tă din aceasta. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$; III) Conform exercițiului precedent avem: $a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n$, ceea ce este echi-

valentă cu inegalitatea mediilor. Egalitatea are loc când toate numerele sunt egale între ele. 27. Este suficient să demonstrăm că $(a + a')(b + b') \cdot$

$$(c + c') \geq (\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'})^3. \text{ Avem } (a + a')(b + b')(c + c') = abc + a'b'c' +$$

$$+ (abc' + acb' + bca') + (ab'c' + ba'c' + ca'b'). \text{ Pe de altă parte, } (\sqrt[3]{abc} +$$

$$+ \sqrt[3]{a'b'c'}) = abc + a'b'c' + 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2 a' b' c'} + \sqrt[3]{abca^2 b'^2 c'^2}. \text{ Acum folo-}$$

sim problema 26 pct II). 28. I), II). Se folosește problema 26. 29. Fie numerele a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât $p = a_1 a_2 \dots a_n$. Din inegalitatea mediilor

$$\text{avem } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{p}, \text{ iar } p = \underbrace{\sqrt[n]{p} \sqrt[n]{p} \dots \sqrt[n]{p}}_{(n \text{ ori})}.$$

inegalitatea mediilor. 31. Din inegalitatea mediilor avem $\frac{a_i^2 + a_i + 1}{3} \geq a_i,$

$1 \leq i \leq n$. Înmulțind membru cu membru cele n inegalități, rezultă inega-

litatea cerută. Din inegalitatea mediilor avem inegalitățile $\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1 \geq$

$$\geq 3 \cdot \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1 \geq 3 \cdot \frac{a_n}{a_1} \text{ care înmulțite membru cu membru ne dau}$$

inegalitatea cerută. 33. În inegalitatea $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, înlo-

cuiind numerele a_1, a_2, \dots, a_n prin $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ se obține inegalitatea

cerută. Egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. **34.** Se folosește problema 25. **35.** Observăm mai întâi că dacă $a \geq b > t > 0$, atunci $(a + t)^2 + (b - t)^2 > a^2 + b^2$. În particular, rezultă că $a^2 + b^2 > \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$, unde

$s = a + b$. Fie acum (1): $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$ și (2): $\underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \dots + \frac{s}{n}}_{(n \text{ ori})} = s$.

Prin raționament analog celui de la problema 25, ținând seama de inegalitatea de înainte, obținem că suma pătratelor termenilor din (1) este mai mare decât suma pătratelor termenilor din (2). **36.** Se folosește problema precedentă. **37.** Trecând totul în membrul drept, inegalitatea devine: $\sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$. Egalitatea are loc numai când toate parantezele sunt

egale cu 0, adică $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. **38.** Aplicăm inegalitatea Cauchy

Buniakovski din problema precedentă, pentru $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}$ și $\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}$. **39.** Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakovski

pentru $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}$ și $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \dots, \sqrt{b_n}$. **40.** Se ridică la pătrat ambii membri și se folosește inegalitatea Cauchy-Buniakovski. **41.** Se aplică inegalitatea cunoscută $|a + b| \leq |a| + |b|$. **42.** Se ridică la pătrat ambii membri. **43.** Se ridică la pătrat ambii membri și se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski. **45.** Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ se consideră cazurile $a \geq b$ și $a < b$. **46.** Se consideră toate situațiile de inegalitate care pot avea loc între a, b, c . **48.** Discriminantul ecuației este $-(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \leq 0$, iar egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$. **49.** Dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b < \sqrt{a^2 + b^2}$. Dacă $a = b \Rightarrow a = b = \frac{a+b}{2} < \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dacă $a > b$ atunci $b < \frac{a+b}{2} < a < \sqrt{a^2 + b^2}$. **50.** I) $x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 1$; II)

$x_2 = \frac{1}{2}$; III) $x \in [0, 1]$; IV) $x = \pm 12$; V) $x_1 = -3, x_2 = -1$; VI) $x \in \{-2\} \cup [2, +\infty)$. **51.** I) $x \in [1, 3]$; II) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$; III) Avem $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$; IV) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; V) nu are soluții; VI) $x \in \mathbf{R}$

VII) $x \in [-1, 3]$; VIII) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$; IX) $x \in (-\infty, 0]$; X) $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

52. a) -5,000...; b) 2,8(3); c) -0,750...; d) 0,000...; e) 2,(45);

f) -24,(904761); g) -10,(578947368421052631); 53. a) $\frac{11}{3}$; b) $\frac{1706}{990} = \frac{853}{495}$; c) $-\frac{309}{99}$; d) $\frac{124}{9900} = \frac{31}{2475}$; e) $-\frac{42999}{9990}$; f) $\frac{4}{3000} = \frac{1}{750}$; g) $\frac{101}{9900}$. 54. a) - c) raționale; d) - k) iraționale. Să demonstrăm, de exem-

plu că $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ este irațional. Presupunem prin absurd, că $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \in \mathbf{Q}$, adică

$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{m}{n}$, unde m, n sunt naturale ($\in \mathbf{N}$), $m, n > 0$, iar $(m, n) = 1$. Avem

$3m^3 = 2n^3$, de unde rezultă că $2 \mid m^3$. Dar atunci $2 \mid m$ și deci putem scrie $m = 2 \cdot m_1$. Înlocuind pe m în egalitatea $3m^3 = 2n^3$ se obține $3 \cdot 2^3 \cdot m_1^3 = n^3$;

deci $2 \mid n$. Dar $2 \mid m$ și $2 \mid n$, contrazice faptul că $(m, n) = 1$. 55. Să

presupunem prin absurd că această fracție este periodică, și fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conțină și cifra a . De aceea între două cifre a consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de $p - 1$ zerouri, contradicție. 56. Deoarece în șirul numerelor naturale sunt numere care au oricâte zerouri consecutive (de exemplu, 10^n pentru orice n), putem face un raționament analog cu cel de la problema precedentă.

57. Presupunem prin absurd că în reprezentarea zecimală a unui număr irațional, fiecare cifră se repetă de un număr finit de ori. Cum sunt doar 10 cifre, înseamnă că numărul are o scriere zecimală cu un număr finit de cifre după virgulă, adică este rațional; contradicție. 58. Dacă $1 \leq a <$

$b < c \leq 9 \Rightarrow$ numerele $0, ab0ab00ab000ab0000ab\dots, 0, abc0abc00abc\dots$

sunt iraționale. 59. $a = 1,73205$; $b = 1,73205010010001\dots$ (vezi problema 55). 60. Să arătăm că între a și b este un număr rațional. Fie $m =$

$= \left[\frac{1}{b-a} + 1 \right] > \frac{1}{b-a}$; deci $m(b-a) > \frac{1}{b-a}(b-a) = 1 \Rightarrow mb - ma > 1$.

Deci $mb > [mb] > ma$. Notăm $k = [mb]$ și deci $mb > k > ma$. Dacă

$k > 0$, atunci $b > \frac{k}{m} > a$. Analog, dacă $k < 0$. Dacă $k = 0, 0 \in (a, b)$.

Fie acum, $r \in (a, b) \cap \mathbf{Q}$ și $s \in (a, r) \cap \mathbf{Q}$, de unde $(r, s) \subset (a, b)$ cu

$r, s \in \mathbb{Q}$. Oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m \neq 0$ avem $\frac{m\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$. Fie $\frac{p}{q} \in (0, s-r)$. Avem $0 < \frac{p\sqrt{2}}{2q} < s-r$ și $\frac{p\sqrt{2}}{2q} \notin \mathbb{Q}$. Deoarece $r \in \mathbb{Q}, r + \frac{p\sqrt{2}}{2q} \in (r, s) \setminus \mathbb{Q}$, și mai mult, $r + \frac{p\sqrt{2}}{2q} \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$. 61. Conform problemei 62, fie $b \in (a, \sqrt{2})$, respectiv $b \in (\sqrt{2}, a)$, un număr rațional. 62. Să presupunem prin absurd că $\sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; atunci $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \in \mathbb{Q}$, de unde rezultă imediat că $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$, contradicție. 63. $\sqrt{m} - \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, dacă m și n sunt pătrate perfecte sau dacă $m = n$; $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, dacă m și n sunt pătrate perfecte. 64. Presupunem prin absurd că $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$; atunci $a = (\sqrt{a})^2 \in \mathbb{Q}$; contradicție. 65. I) Fie $k = a + b, a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$. Presupunem prin absurd $k \in \mathbb{Q}$. Atunci $b = k - a \in \mathbb{Q}$, contradicție; II) Fie $p = \frac{1}{\alpha}$. Presupunem prin absurd că $p \in \mathbb{Q}$; atunci $\alpha = \frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$, contradicție. 66. Observăm că $a - b = (a + b) - 2b$; $a + 2b = (a + b) + b$. 67. I) Conform problemei 63, din $\sqrt{b} - \sqrt{b'} = a' - a \in \mathbb{Q}$, rezultă $b = b'$; II) Conform problemei 63, din $\sqrt{b} + \sqrt{b'} = a' + a \in \mathbb{Q}$, rezultă că b și b' sunt pătrate perfecte; contradicție. 68. $n^2 + 1 = k^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (n - k)(n + k) = -1$, de unde $n - k = -1$ și $n + k = 1$, adică $n = 0$. 69. a) $n = 3$; b) $n = 4$. 70. a) primul; b) primul; c) al doilea; d) primul; e) sunt egale; f) primul. 71. a) $2,236 \leq \sqrt{5} < 2,327$; b) $-2,237 \leq -\sqrt{5} < -2,236$; c) $0,400 \leq \frac{2}{5} < 0,401$; d) $-0,400 \leq -\frac{2}{5} < -0,399$; e) $3,316 \leq \sqrt{11} < 3,317$; f) $-3,317 \leq -\sqrt{11} < -3,316$; g) $0,583 \leq \frac{7}{13} < 0,539$; h) $-0,539 \leq -\frac{7}{13} < -0,538$; i) $1,181 \leq$

$$\leq \frac{13}{11} < 1,182 \quad \text{j)} \quad -1,182 \leq -\frac{13}{11} < -1,181. \quad \mathbf{72.} \quad \text{a)} \quad x+y=5,622\dots; \quad \text{b)}$$

$$x+y=-0,298\dots \quad \mathbf{73.} \quad \text{a)} \quad xy=1,509\dots; \quad \text{b)} \quad xy=6,866\dots \quad \mathbf{74.} \quad \text{a)} \quad 4,1815\dots;$$

$$\text{b)} \quad 4,0599\dots; \quad \text{c)} \quad 2,1642\dots; \quad \text{d)} \quad 2,9027\dots; \quad \text{e)} \quad 0,4096\dots; \quad \text{f)} \quad 0,5098\dots; \quad \text{g)}$$

$$5,3823\dots \quad \mathbf{75.} \quad \text{a)} \quad 2,449\dots; \quad \text{b)} \quad -3,872\dots; \quad \text{c)} \quad 1,984\dots; \quad \text{d)} \quad -1,490\dots; \quad \text{e)}$$

$$-5,916\dots; \quad \text{f)} \quad -2,732\dots; \quad \text{g)} \quad 1,740\dots \quad \mathbf{76.} \quad \text{Mai întâi se aduc numerele la o}$$

formă mai simplă. Dacă notăm cu a, b, c, d , respectiv, cele patru numere

de la a), b), c), d), atunci: a) $-5,1082 \leq a < -5,1081$; b) $-2,0000 \leq b <$

$< -1,9999$; c) $2,7534 \leq c < 2,7535$; d) $-0,0939 \leq d < -0,0938$. **78.** Ecu-

ția dată se mai scrie $999(x+y) = 272xy$. Se arată că ecuația nu are so-

luții întregi, dar are o infinitate de soluții raționale. **79.** a) Inecuația este

echivalentă cu $\frac{|a-b|}{|b+n|} < \frac{|a-b|}{b}$. Cum $a \neq b$, inecuația este echivalentă

$$\text{cu } b = |b| < |b+n| = b+n; \quad \text{b)} \quad \left| \frac{a+n_0}{n+n_0} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|b+n_0|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\varepsilon} <$$

$$< |b+n_0| \leq |b| + |n_0| \Rightarrow n_0 > \frac{|a-b|}{\varepsilon} - |b|. \text{ Putem lua } n_0 = \left\lceil \frac{|a-b|}{\varepsilon} - |b| \right\rceil + 1.$$

$$\mathbf{80.} \quad k = l(l+1), l \in \mathbf{N}. \quad \mathbf{81.} \quad \text{Fie } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = x \in \mathbf{Q}, \text{ atunci } \sqrt{a} + \sqrt{b} =$$

$$= x - \sqrt{c}; \text{ deci } a + b + 2\sqrt{ab} = x^2 - 2x\sqrt{c} + c, \text{ de unde } 2\sqrt{ab} = x^2 + c -$$

$$-a - b - 2x\sqrt{c}. \text{ Printr-o nouă ridicare la pătrat: } 4x(x^2 + c - a - b)\sqrt{c} =$$

$$= (x^2 + c - a - b)^2 + 4x^2c - 4ab. \text{ Dacă } x(x^2 + c - a - b) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{c} \in \mathbf{Q}.$$

Dacă $x(x^2 + c - a - b) = 0$, atunci avem una din situațiile: I) $x = 0$,

atunci $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = 0$; II) $x \neq 0$, atunci $x^2 + c - a - b = 0$. În acest

caz se obține $\sqrt{c} = 0$; deci $\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Analog, se demonstrează că $\sqrt{a},$

$\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a_1},$

$$\sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q} \quad \mathbf{82.} \quad \text{Fie } p, q \in \mathbf{N}, p \neq q \text{ și } x = \sqrt[n]{\frac{p}{\sqrt{2}}}; \quad y = \sqrt[n]{\frac{q}{\sqrt{2}}}. \text{ A-}$$

tunci $x^n \sqrt{2}, y^n \sqrt{2} \in \mathbf{N}$ și $x \neq y$, iar $f(x) = f(y) = 0$. **84.** a) Ecuația este

echivalentă cu $\frac{x-2}{3} \leq \frac{x+3}{4} < \frac{x-2}{3} + 1$ și $\frac{x-2}{3} \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{11, 14, 17\}$

b) Avem condițiile $\frac{x-1}{3} \leq \frac{x^2-3x+1}{3} < \frac{x-1}{3} + 1$ și $\frac{x-1}{3} \in \mathbf{Z}$. Se obține

$x = 4$. **85.** a) Presupunem prin absurd că $\left| a_k - \frac{1}{2} a_n \right| > \frac{1}{2}$, oricare ar fi

$k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $a_k \in \left(-\infty, \frac{1}{2} a_n - \frac{\varepsilon}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty \right)$. Din $k = n \Rightarrow$

$a_n > \varepsilon$, deci $a_n \in \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty \right)$. Din $|a_1| \leq \varepsilon \Rightarrow a_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{2} a_n - \frac{\varepsilon}{2} \right)$.

Din $|a_{i+1} - a_i| \leq \varepsilon$ rezultă că toți $a_i, 1 \leq i \leq n$, se găsesc într-unul singur din cele două intervale; contradicție; b) Fie $s_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_n, s_1 =$

$= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - a_n, \dots, s_n = -a_1 - a_2 - \dots - a_n$. Putem presupune $s_0 > 0$

și deci $s_n < 0$. Fie k astfel încât $s_k > 0, s_{k+1} < 0$ (dacă una dintre sume

este nulă, problema este rezolvată). Dar $|s_k - s_{k+1}| < 2|a_k|$. Din $0 \in (s_k, s_{k+1})$

rezultă că una din cele două sume s_k, s_{k+1} are modulul $\leq |a_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

86. Ridicând la pătrat ambii membri ai primei egalități, obținem

$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}, a, b, x, y \in \mathbf{Q}$. De aici rezultă $a = x + y, b = 4xy$,

x și y fiind rădăcinile ecuației de gradul al doilea: $x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$. Pen-

tru ca să existe x și y raționale, este necesar și suficient ca $a^2 - b$ să fie pătratul unui număr rațional. A doua egalitate se tratează la fel. Avem

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$. Aceasta se numește formula

radicalilor compuși. **87.** Putem presupune $a > 0$; deci $c < 0$. Avem

$0 = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{a+b+c}{m+1}$, deci $a+b+c > 0$. Dar $a+b+c+$

$+\frac{c}{m} = a+b+\frac{m+1}{m}c = a+b-\frac{m+1}{m+2}a-b = \frac{1}{m+2}a > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Avem } f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1) &= \frac{(a+b+c)(am^2+bm^2+bm+cm^2+2m+c)}{(m+1)^2} = \\ &= \frac{(a+b+c)(-am-bm-cm-c)}{(m+1)^2} = \frac{-m}{(m+1)^2}(a+b+c)\left(a+b+c+\frac{c}{m}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$88. \text{ Dacă } a < b, |x-a|+|x-b| = \begin{cases} a+b-2x, & \text{pentru } x \leq a, \\ -a+b, & \text{pentru } a \leq x \leq b, \\ 2x-a-b, & \text{pentru } x \geq b. \end{cases} \text{ Deci funcția}$$

atinge valoarea minimă $-a+b$, în fiecare punct al intervalului $[a, b]$.

În general, putem presupune $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Dacă $n = 2k$ scriem $f(x) =$

$= (|x-a_1|+|x-a_n|) + (|x-a_2|+|x-a_{n-1}|) + \dots + (|x-a_k|+|x-a_{k+1}|)$. Pentru

cazul $n=2$, se găsește în final că funcția își atinge valoarea minimă:

$-a_1-a_2-\dots-a_k+a_{k+1}+\dots+a_n$ în fiecare punct al intervalului $[a_k, a_{k+1}]$.

Pentru $n=2k+1$, scriem $f(x) = (|x-a_1|+|x-a_n|) + \dots + (|x-a_k|+|x-a_{k+2}|) + |x-a_{k+1}|$. Rezultă că funcția își atinge valoarea minimă:

$-a_1-a_2-\dots-a_k+a_{k+2}+a_{k+3}+\dots+a_n$ în $x=a_{k+1}$.

$$89. a) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{(n \text{ ori})} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2 + (n-1)} + \dots + \frac{3n}{2n^2} \right] < \frac{1}{2} \left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \dots + \frac{3n}{2n^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(n+1) \frac{3}{2n} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}. \text{ De aici, rezultă inegalitatea din dreapta}$$

relației de la pct. a); b) Avem evident $\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. Apoi,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \right) < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{(2n \text{ ori})} = \frac{2n}{n} = 2.$$

Pe de altă parte avem:
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} \right) + \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{3n-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2 - n^2} + \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - (n-1)^2} + \dots + \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - n^2} \right] >$$
$$> \frac{1}{2} \left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2} + \frac{4n+2}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{4n+2}{(2n+1)^2} \right] = \frac{1}{2} (2n+1) \frac{4n+2}{(2n+1)^2} = 1.$$

90. Dacă $q=0$ sau $\sqrt{r} \in \mathbf{Q}$ este evident. Dacă nu, presupunem prin absurd că $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$ ($q \neq 0, \sqrt{r} \notin \mathbf{Q}$). Atunci $2 = p^3 + 3q^2pr + \sqrt{r} \cdot (3qp^2 + q^3r) \Rightarrow p^3 + 3q^2pr = q \cdot q(3p^2 + q^2r) = 0$. Deci $3p^2 + q^2r = 0$, contradicție. **91.** Avem de găsit soluțiile $(a, b), a, b \in \mathbf{Q}, b \geq 0$ ale ecuației $5a^2 - 3a + 16 = b^2$. O soluție particulară este $(0, 4)$. Fie $a = a_1, b = b_1 + 4$ și avem $5a_1^2 - b_1^2 - 3a_1 - 8b_1 = 0$. Pentru $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ avem $b_1 / a_1 = m / n, (m, n) = 1$. Înlocuind $b_1 = (m/n)a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{3n^2 + 8mn}{5n^2 - m^2}, a_1 \neq 0$.

Deci mulțimea $\left\{ a \mid a = \frac{3n^2 + 8mn}{5n^2 - m^2}, m, n \in \mathbf{Z}, (m, n) = 1 \right\}$. Altă soluție

poate fi dată dacă scriem relația $5a^2 - 3a + 16 = b^2$ sub forma $\frac{5a-3}{b-4} =$

$\frac{b+4}{a} = u, u \in \mathbf{Q}$. **92.** Fie $\{x\} = x - [x]$; atunci ecuația devine $x^3 - a =$

$= 3 - \{x\}$, de unde $2 < x^3 - x \leq 3$. Mai mult, se arată că pentru $x \geq 2$,

$x^3 - x > 3$ pentru $x < -1, x^3 - x < 2$; pentru $x = -1, x^3 - x = 0 < 2$; pen-

tru $-1 < x \leq 0, x^3 - x < 1$ și pentru $0 < x \leq 1, x^3 - x \leq 1$. Deci trebuie ca

$1 < x < 2$ și prin urmare $[x] = 1$. Ecuația inițială se scrie $x^3 - 1 = 3$, deci

$x^3 = 4$ de unde $x = \sqrt[3]{4}$. **93.** Avem $s = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} > \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{1000 \cdot 1001} > \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{1001} > 0,1 - 0,001 = 0,099$. De asemenea, $s < \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000} = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{1000} < 0,112 - 0,001 = 0,111$. Deci $0,099 < s < 0,111$. **94.** Dacă $a < 1$, atunci $a < \sqrt{a} < 1$. Presupunem prin absurd că în reprezentarea lui \sqrt{a} nu sunt 100 de 9 consecutivi, adică $\sqrt{a} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$. Ridicând la pătrat obținem $a < 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200}$. Dar, $1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ și deci $a < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$, ceea ce contrazice faptul că în reprezentarea lui a

sunt 100 de 9 consecutivi după virgulă. **95.** a) Fie $N_1 = \frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$ și $N_2 = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$. Făcând diferența: $N_2 - N_1 = \frac{\alpha^2(1+\beta) - \beta^2(1+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) + \alpha\beta(\alpha - \beta)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)} > 0 \Rightarrow N_2 > N_1$. b) Se demonstrează analog.

96. Este suficient să demonstrăm pentru $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Fie $a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0$. Separăm a și ridicăm la cub. Se obține că $p \mid a$. Împărțim egalitatea cu $\sqrt[3]{p}$ și analog deducem $p \mid b$. Continuăm în același mod și găsim $p \mid c$ ș.a.m.d. Deducem că oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $p^k \mid a$, $p^k \mid b$, $p^k \mid c$ și deci în mod necesar $a = b = c = 0$. **97.** a) $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$, unde $0 \leq \{x\}, \{y\} < 1$, sunt părțile fracționare ale sumelor x , respectiv y .

Atunci $x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\}$; $\{x\} + \{y\} \geq 0 \Rightarrow [x] + [y] \leq x + y$ și $[x] + [y] \in \mathbb{Z}$. Deci $[x] + [y] \leq [x + y]$; b) $x = [x] + \{x\}$, unde $0 \leq \{x\} < 1$.

Fie $[x] = qn + r$, unde $0 \leq r \leq n - 1$. Atunci $\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}$, $\left[\frac{[x]}{n} \right] = q$ și

$x = qn + r + \{x\} = qn + r_1$, unde $r_1 = r + \{x\} < n$. Deci, $\frac{x}{n} = q + \frac{r_1}{n}$, unde

$0 \leq \frac{r_1}{n} < 1$ și $\left[\frac{x}{n} \right] = q = \left[\frac{[x]}{n} \right]$; c) Dacă $x - [x] < \frac{1}{2}$, atunci $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x]$

și deci $[2x] = 2[x]$ și $[2x] - [x] = 2[x] - [x] = [x] = \left[x + \frac{1}{2} \right]$. Dacă $x -$

$-[x] \geq \frac{1}{2}$, atunci $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x] + 1$, $[2x] = 2[x] + 1$ deci $[2x] - [x] = 2[x] +$

$+1 - [x] = [x] + 1 = \left[x + \frac{1}{2} \right]$; d) Fie $m = [x]$ și presupunem că $m + \frac{l}{n} \leq$

$x < m + \frac{l+1}{n}$, unde $0 \leq l \leq n - 1$. Deducem deci că $x + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots +$

$+ \left[x + \frac{n-l-1}{n} \right] + \left[x + \frac{n-l}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = (n-l)m + l(m+1) = nm +$

$+l = n \left(m + \frac{l}{n} \right) = [nx]$; 98. b) $n = 4$; c) 2 cifre nu sunt în perioadă, iar 6

sunt în perioadă. 99. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 2}{n(n+1)(n+2)}$. Se observă că

numitorul fracției este multiplu de 3, pe când numărătorul nu este multiplu de 3. Numitorul fracției, adusă la forma ireductibilă, are factorii 2 și 3, de unde rezultă că fracția se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. 100. Observăm mai întâi că este suficient să arătăm pentru $m = 1$. a)

Fie $\frac{1}{n} = 0, (a_1 a_2 \dots a_p)$, adică $\frac{1}{n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_p}{10^p - 1}$, deci $10^p - 1 = n \cdot (a_1 a_2 \dots a_p)$

b) Cu o perioadă de o cifră sunt $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ și $\frac{a}{9}$ unde $(a, 9) = 1$. Dacă,

acum, perioada este bc , atunci fracția este $\frac{bc}{99}$. Ea ar putea fi simplificată, eventual, printr-un divizor al lui 99. La numitor rămâne un divizor al lui 99. Deci numitorul poate fi 3, 9, 11, 33, 99. Însă la $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{9}$ perioada are o cifră. Deci rămân numai fracțiile de numitor 11, 33, 99, care au perioada de două cifre, etc. c) Produsul a două numere cu perioadă simplă este un număr cu perioadă simplă. Conform a), avem $10^k - 1 = Mn$ și $10^{k'} - 1 = Mn'$ și cum $(n, n') = 1$, rezultă $10^{(k, k')} - 1 = Mnn'$. Mai mult, (k, k') este cel mai mic număr cu această proprietate. **101.** Conform problemei 99. b), fracțiile cu două cifre la partea periodică sunt cele de la numitor 11, 33, 99. Dacă la o astfel de fracție înmulțim numitorul cu 2, 5 sau cu 10, obținem fracțiile cerute în enunț. **102.** Perioadele lui $\frac{1}{7}$ și $\frac{1}{13}$ au câte 6 cifre fiecare. Deci $\frac{m}{7} = \frac{p}{999\,999}$ și $\frac{m}{13} = \frac{p'}{999\,999}$, de unde $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$. **103.** Perioada având $n - 1$ cifre, ca resturi parțiale la împărțirea lui m la n , întâlnim toate numerele a , $1 \leq a \leq n - 1$, eventual într-o altă ordine. Când apare ca rest un anume m , de aici încolo resturile parțiale sunt aceleași cu acelea obținute prin împărțirea lui m la n .

Capitolul V

FUNCTIA DE GRADUL AL DOILEA. INECUAȚII SISTEME DE ECUAȚII

1. a) $f(x) = (x - 1)^2 + 5$; b) $f(x) = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{57}{4}$; c) $f(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 5$; d) $f(x) = 0,5(x - 0,2)^2 + 0,28$; e) $f(x) = -0,4(x - 1,25)^2 + 0,725$; f) $5\left(x - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{79}{80}$; 2. a) $x = \frac{1}{4}$, $V\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$; b) $x = -\frac{1}{2}$, $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{43}{4}\right)$; c) $x = \frac{3}{2}$, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{-39}{4}\right)$; d) $x = 1$, $V(1, -2)$; e) $x = 0,1$, $V(0,1; 0,395)$; f)

$x = \frac{1}{3}$, $V\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{36}\right)$. 3. a) $y_{\max} = 0$; b) $y_{\min} = \frac{1}{2}$; c) $y_{\min} = -\frac{1}{4}$; d) $y_{\max} = 7$;

e) $y_{\min} = \frac{14}{5}$; f) $y_{\min} = -4$. 4. a) Pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ funcția este

pozitivă și pentru $x \in (1, 5)$ funcția este negativă; b) Pentru $x \in (-3, -2)$

funcția este pozitivă și pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ funcția este negati-

vă; c) Funcția este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R}$; d) Funcția este pozitivă pentru

$x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) Funcția este pozitivă pentru $x \in (1, 4)$; f) Funcția este

negativă pentru $x \in \left(0, \frac{25}{2}\right)$. 6. a) $f(x) = |x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$; $x_1 =$

$= x_2 = 1$, $V(1, 0)$ (fig. 1);

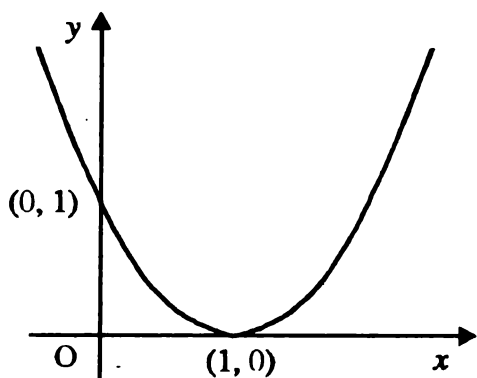


Fig. 1

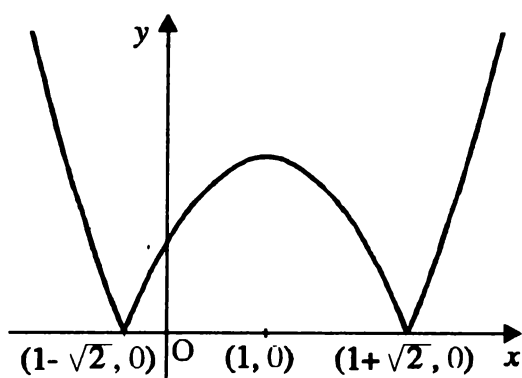


Fig. 2

b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & \text{dacă } x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}], \\ x^2 - 2x - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty); \end{cases}$ (fig. 2)

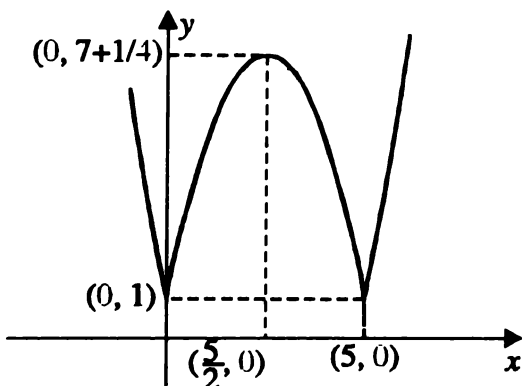


Fig. 3

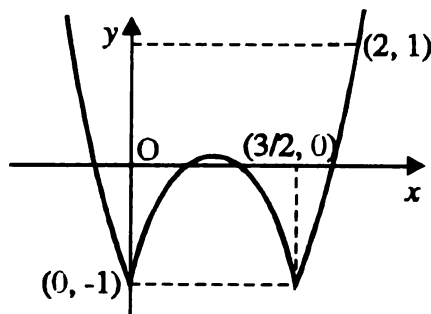


Fig. 4

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), \\ -x^2 + 5x + 1, & \text{dacă } x \in (0, 5); \end{cases} \quad (\text{fig. 3})$$

$$\text{d) } k(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right), \\ -2x^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{3}{2}\right); \end{cases} \quad (\text{fig. 4})$$

e) (fig. 5);

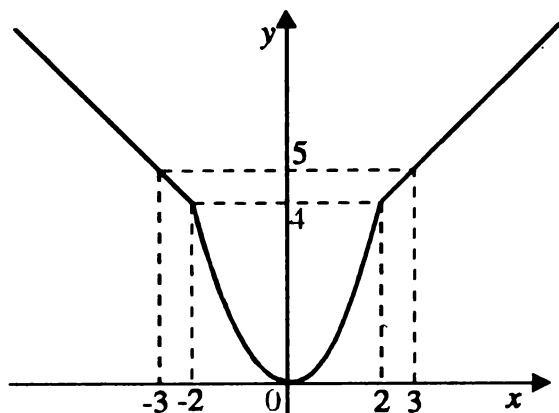


Fig. 5

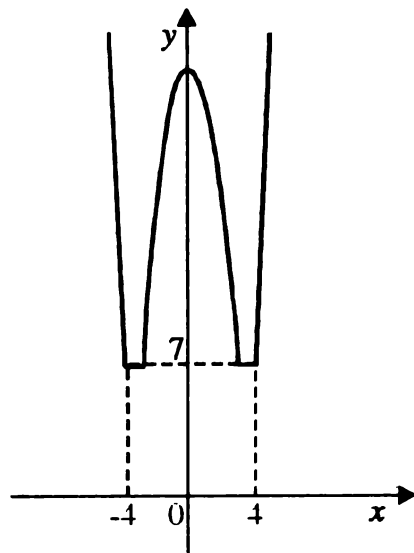


Fig. 6

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 25, & \text{dacă } x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty), \\ 7, & \text{dacă } x \in (-4, 3] \cup (3, 4], \\ -2x^2 + 25, & \text{dacă } x \in (-3, 3); \end{cases} \quad (\text{fig. 6})$$

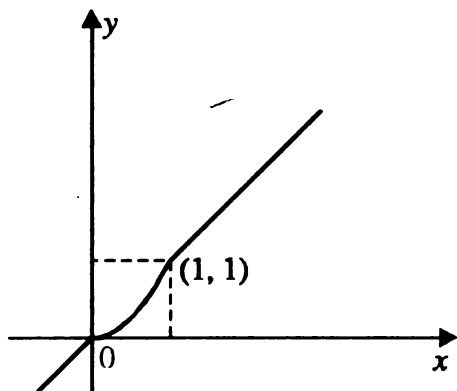


Fig. 7

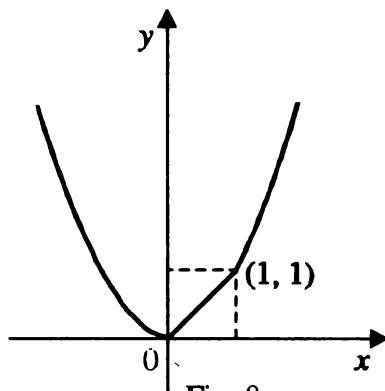


Fig. 8

$$g) f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \\ x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1); \end{cases} \quad (\text{fig. 7})$$

$$h) f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty); \end{cases} \quad (\text{fig. 8})$$

$$i) f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ 1, & \text{dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases} \quad (\text{fig. 9})$$

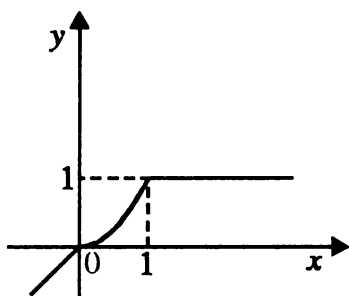


Fig. 9

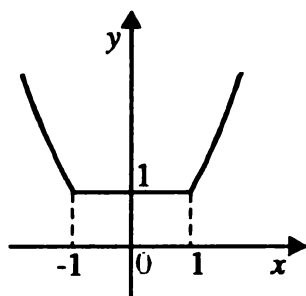


Fig. 10

$$j) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), \\ 1, & \text{dacă } x \in (-1, 1); \end{cases} \quad (\text{fig. 10})$$

$$k) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty), \\ 2x, & \text{dacă } x \in (0, 2); \end{cases} \quad (\text{fig. 11}); \quad l) (\text{fig. 12});$$

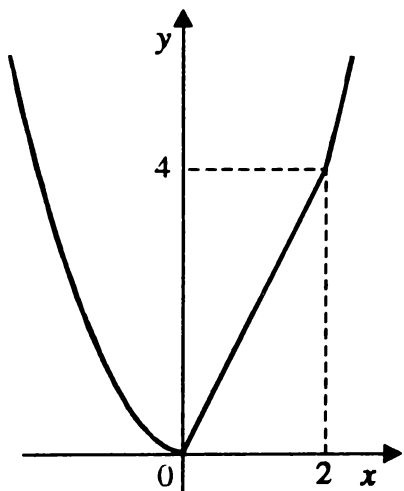


Fig. 11

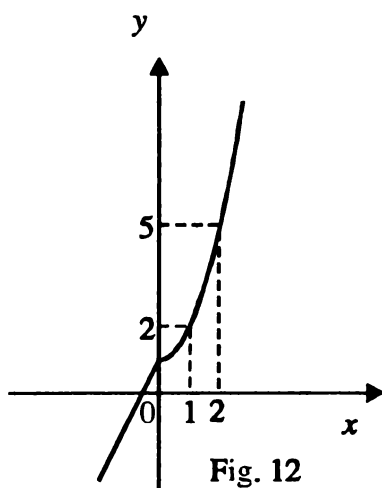


Fig. 12

7. $a = 1, c = -4$. 8. $a = 1, b = -2, c = 3$. 9. $a = 1, b = -5, c = 6$. 10. $a = 1, b = -8, c = 12$. 12. a) Pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $[0, +\infty)$ funcția este evident strict crescătoare. Fie $x_1 < 0$ și $x_2 > 0$, atunci $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 1 - x_2^2 - 1 = x_1 - x_2^2 < 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$ și cum $x_1 < x_2$, atunci funcția este strict crescătoare pe toată axa reală; b) Se demonstrează ca la punctul a). 13. Se procedează ca la problema 12. 14. Pentru injectivitate se ține cont că funcțiile respective sunt strict crescătoare sau descrescătoare.

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \sqrt{x-1}, & \text{dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1], \\ 1 + \sqrt{x-1}, & \text{dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_3^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \frac{1-x}{2}, & \text{dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_4^{-1} \begin{cases} 2 + \sqrt{2-x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2), \\ 2 - \sqrt{x-2}, & \text{dacă } x \in [2, +\infty); \end{cases}$$

15. $a = -25, b = 10, c = 8; a = -1, b = 10, c = -16$. 16. a) $m = -\frac{6}{7}$; b) $m =$

$\frac{7}{3}$; c) $-4; -\frac{12}{13}$; d) $15; -3$; e) -2 ; f) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $-2 \pm \sqrt{2}$; h) 0 ; i) $12; -3$; j)

$-\frac{5}{8}; -1$; k) $0; 2$. 17. Se ține seama de relațiile între rădăcini și coeficienți

la ecuația de gradul II și se obține: a) m ; b) $m + 1$; c) $m^2 - 2m - 2$; d)

$\sqrt{m^2 - 4m - 4}$ dacă $x_1 \geq x_2$ și $-\sqrt{m^2 - 4m - 4}$ dacă $x_1 < x_2$; e) $m(m^2 - 3m -$

$-3)$; f) $m^4 - 4m^3 - 2m^2 + 4m + 2$; g) $m^5 - 5m^4 + 10m^2 + 5m$; h) $\frac{m}{m+1}$; i)

$\frac{m^2 - 2m - 2}{(m+1)^2}$; j) $\frac{m^3 - 3m^2 - 3m}{(m+1)^3}$. 18. Se observă că rădăcinile ecuației

date sunt pozitive. a) $S = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, S^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}$, de unde $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}}$; b) $S = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$,

$$S^4 = x_1 + x_2 + 4\sqrt[4]{x_1 x_2} (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{x_1 x_2}, S^4 = m^2 + 4\sqrt[4]{m^2} +$$

$$+ 1\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}} + 6\sqrt{m^2 + 1}, S = \sqrt[4]{m^2 + 4\sqrt[4]{m^2 + 1}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2 + 1}} + 6\sqrt{m^2 + 1}}.$$

19. a) $x^2 - 49 = 0$, b) $x^2 + 5x = 0$; c) $15x^2 - 34x + 15 = 0$; d) $14x^2 - 17x + 5 = 0$; e) $9x^2 - 6x - 1 = 0$. **20.** a) $y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{m+1}{5m-2}, y_1 y_2 = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{2}{5m-2}$. Sau se procedează astfel $x = \frac{1}{y}$ și se înlocuiește în ecuația dată.

b) $y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-m+1}{2} - \frac{m+1}{5m-2} = \frac{-(m+1)5m}{2(5m-2)}, y_1 y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = \frac{25m^2}{2(5m-2)}$; c) $y_1 + y_2 = \frac{4m-3}{2}, y_1 y_2 = \frac{-(m+1)(5m-2)}{4}$; d)

$$y_1 + y_2 = \frac{x_1 x_2 + x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = \frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}, y_1 y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{S^2}{p} = \frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$$
; e) $y_1 + y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{m^2 - 18m + 9}{10m - 4}, y_1 y_2 = 1$;
$$y_1 + y_2 = \frac{-(m+1)(m^2 - 28m + 13)}{(5m-2)^3}, y_1 y_2 = \frac{8}{(5m-2)^3}.$$

21. a) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$; b) $x \in \mathbf{R}$; c) $x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}, +\infty\right)$; d) $x \in \mathbf{R}$; e) $x \in \left(-\infty, \frac{-3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$; f) $\left(-1, \frac{4}{7}\right)$; g) $x \in \left(2, \frac{7}{2}\right)$; h) $x \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$; i) $x \in (-6, 6)$; j) $(1-\sqrt{5}, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, 1) \cup (1, 1+\sqrt{5})$; k) $x \in \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$; l) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$; m) $x \in (-\infty, 5-\sqrt{12}) \cup (5+\sqrt{12}, +\infty)$.

22. a) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right) \cup (1, +\infty)$; b) $x = \frac{1}{3}$;

$$\text{c) } x \in \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{6}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{9 - \sqrt{21}}{6} \right); \quad \text{d) } x \in (-\infty, -4); \quad \text{e) } x \in$$

$$\in (-\infty, -1 - \sqrt{23}] \cup [1 - \sqrt{11}, -1 + \sqrt{23}] \cup [1 + \sqrt{11}, +\infty). \quad 23. \Delta_x < 0; \Delta_x =$$

$= -y^2 + 4y - m + 4 < 0$. Se pune $\Delta_y < 0$, unde Δ_y este discriminantul ecuației $-y^2 + 4y - m + 4 = 0$, deci $\Delta_y = -4m + 32 < 0$; $m \in (8, +\infty)$. 24. Se

procedează ca la problema 23. și se găsește $m \in \left(\frac{5}{4}, +\infty \right)$. 25. Se no-

tează $x^2 - 4x + 5 = t$ și se obține $t \in [-1, 0) \cup \left[\frac{4}{5}, +\infty \right)$, de unde $-1 \leq x^2 -$

$-4x + 5 < 0$ sau $x^2 - 4x + 5 \geq \frac{4}{5}$ și se obține $x \in \mathbf{R}$. 26. $f([0, 2]) = f([0, 1) \cup$

$\cup [1, 2]) = [-1, 0]$; b) $f([-2, 4]) = f([-2, 1) \cup [1, 4]) = [-1, 8]$; c) $f([1, 6]) =$

$= [-1, 24]$; d) $f([-10, 0]) = [0, 120]$. S-a ținut cont că funcția este strict

descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ și strict crescătoare pe $(1, +\infty)$. 27. $f([-4, 0]) =$

$= [3, 35]$; b) $f([1, 6]) = f([1, 2) \cup [2, 6]) = [-1, 15]$; c) $f([3, 5]) = [0, 8]$;

d) $f([3, +\infty)) = [0, +\infty)$; e) $f((-\infty, -1]) = [8, +\infty)$; f) $f((-\infty, 3]) = f((-\infty, 2) \cup$

$\cup [2, 3]) = [-1, +\infty)$. 28. a) $\Delta = 49$, $y_{\min} = -\frac{49}{4}$; $\text{Im } f = \left[-\frac{49}{4}, +\infty \right)$; b)

$\Delta = -3$, $\text{Im } f = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$; c) $\text{Im } f = [3, +\infty)$; d) Se egalează fracția cu m

și se obține $x^2(1 - m) - x(2 + m) - (3 + m) = 0$. Se pune condiția $\Delta \geq 0$; $m \in$

$\in \left[\frac{2 + 2\sqrt{13}}{-3}, \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3} \right]$ deci $\text{Im } f = \left[\frac{2 + 2\sqrt{13}}{-3}, \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3} \right]$; e) $\text{Im } f =$

$= \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right]$; f) $\text{Im } f = (-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty)$; g) Pre-

supunem $a < b$ și obținem $\text{Im } f = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$. Dacă $a = b$, $\text{Im } f =$

$= \mathbf{R} \setminus \{a\}$. 29. Se pun condițiile ca discriminantul de la numitor și de la

numărător să fie negativ și se obține $m \in (1, 2)$. 30. a) Se arată că discri-

minantul numitorului este negativ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. b) Discriminantul

de la numărător să fie negativ: $m \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$. 31. Se găsește

$\text{Im } f$ în funcție de a , $\text{Im } f = \left[\frac{-a + 2}{3}, \frac{3a + 6}{3} \right]$ dacă $a \geq -1$ și $\text{Im } f =$

$$= \left[\frac{3a+6}{3}, \frac{-a+2}{3} \right], a < -1; \text{ se pun condițiile } \frac{-a+2}{3} \geq -3 \text{ și } \frac{3a+6}{3} \leq 2$$

în cazul când $a \geq -1$ și se obține $a \in [-1, 0]$. În cazul când $a < -1$ se pun condițiile $\frac{3a+6}{3} \geq -3$ și $\frac{-a+2}{3} \leq 2$ și se obține $a \in [-4, -1)$. **32.** Fie

$$y = \frac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}; \text{ se obține } (y-3)x^2 - mx + y-n = 0 \text{ și se pune condiția}$$

$$\Delta_x \geq 0; \text{ Im } f = \left[\frac{n+3-\sqrt{(n-3)^2+m^2}}{2}, \frac{n+3+\sqrt{(n-3)^2+m^2}}{2} \right]; \text{ se ega-}$$

lează aceste valori cu -3, respectiv 5 și se obține $n = -1$ și $m = \pm 4\sqrt{3}$. **33.**

$$a \in [1, +\infty) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}. \text{ 34. a) } a = 1 \text{ atunci } c = \frac{3}{4}(2m^2 + m) \text{ și } b = |2m + 1|;$$

$$S = -|2m + 1|, P = \frac{3}{4}(2m^2 + m) \Rightarrow \text{ecuația } x^2 + |2m + 1|x + \frac{3}{4}(2m^2 + m) =$$

$$= 0; \text{ b) Pt. } m > -\frac{1}{2} \Rightarrow m \in \left(-2, -\frac{4}{11} \right) \text{ și } \left(-2, -\frac{4}{11} \right) \cap \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right) = \emptyset$$

$$\text{Dacă } m < -\frac{1}{2} \Rightarrow m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3-\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{73}}{2} \right) \text{ și}$$

$$\text{deci } m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3-\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2} \right). \text{ 35. a) } \Delta = m^2 - 6m + 1; \text{ deci rezul-}$$

$$\text{tă } m_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}. S = \frac{2(m+1)}{m}, P = \frac{8}{m}.$$

m	Δ	P	S	Natura și semnul rădăcinilor
$-\infty$	+	-	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_2 > 0, x_2 > x_1 $
-1	+	-	0	$m = -1, x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 = x_2$
0	+	-	-	$m \in (-1, 0), x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2$
$3-2\sqrt{2}$	0	+	+	rădăcini egale și pozitive
	-	+	+	nu are rădăcini reale
$3+2\sqrt{2}$	0	+	+	rădăcini egale și pozitive
$+\infty$	+	+	+	rădăcini reale distincte și pozitive

$$\text{b) } m \in (3-2\sqrt{3}, 0) \cup (3+2\sqrt{3}, +\infty). \quad 36. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = m^2 \end{cases} \quad \text{și}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = m+3 \\ y_1 y_2 = 12m+11 \end{cases} \quad \text{și se obține } m \in [-1, 5]. \quad 37. \text{ Se obține } \frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha - \alpha^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \text{ și } -1 \leq \frac{2\alpha + 2}{\alpha - \alpha^2} \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -1] \cup (0, 1); (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cap (-\infty, -1] \cup (0, 1) = (-\infty, -1] \text{ deci } \alpha \in (-\infty, -1]. \quad 38. m_1 = 3, m_2 = \frac{3}{2}; \text{ b) } m \in (0, 2).$$

$$39. (f \circ g)(x) = \begin{cases} (5x-2)^2 + 6(5x-2), & \text{dacă } x < -\frac{1}{5}, \\ -2(5x-2) - 5, & \text{dacă } -\frac{1}{5} \leq x \leq 1, \\ -2(x^2 - 3x + 4) - 5, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (x^2 + 6x)^2 - 2(x^2 + 6x) + 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10}) \\ 5(x^2 + 6x) - 2, & \text{dacă } x \in [-3 - \sqrt{10}, -3) \\ 5(-2x - 5) - 2, & \text{dacă } x \in [-3, +\infty) \end{cases}$$

$$40. (f \circ g)(x) = \begin{cases} (4x-2)^2 - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ (3x^2 - 2)^2 - 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \\ -5(3x^2 - 2) - 1, & \text{dacă } x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right); \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3(x^2 - 1)^2 - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 4(x^2 - 1) - 2, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ 4(-5x - 1) - 2, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$41. (f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right) \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

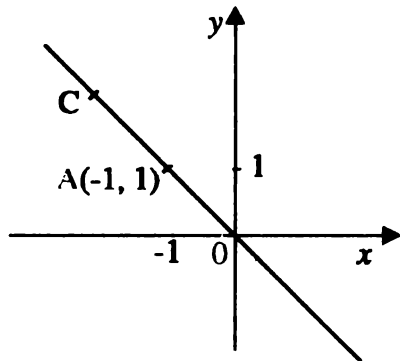


Fig. 13

42. $y = \frac{m-1}{m}$, $m > 0$, $m = \frac{1}{1-y} \Rightarrow y < 1$. Pe semidreapta $|AO$ se găsesc

vârful parabolelor cu ramurile în sus și pe semidreapta $|AC$ vârful parabolelor cu ramurile în jos. (fig. 13).

43. Se pune $y_{\min} > 0$, $y_{\min} = -m^2 + 3m - 2$ deci $m \in (1, 2)$. 44. a) $x_{\min} = m - 2$, $y_{\min} = -m^2 + 5m - 6$ deci parabola este $y = -x^2 + x$; b) $y_{\min} = -m^2 + 5m - 1 < 0$ deci $m \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

45. $\Delta > 0$, $\Delta = 4(m^2 - m + 1) > 0$, $(\forall)m \in \mathbf{R}$. 46. a) $x_{\min} = m - 1$, $y_{\min} = -m^2 + 3m - 1$; parabola este $y = -x^2 + x + 1$; b) Se arată că y_{\min}

este mai mic decât $\frac{5}{4}$ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. 47. $x_v = \frac{2m-1}{2m}$; $y_v = \frac{-1}{4m}$;

$x_v = y_v$ și $m = \frac{1}{4}$. 48. $\Delta > 0$, $\Delta = 24m - 36$; $m \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$. 49. $\Delta > 0$,

$(\forall)m \in \mathbf{R}$ și $\Delta = 36$. 50. $\Delta = 0$, $\Delta = 4m^2 - 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $x_{1\min} = 1$, $x_{2\min} = -1$. 51. $m = -1$. 52. Se găsesc

punctele de intersecție ale curbilor, $A(1, 2)$ și $B(3, 14)$. 53. $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = -1$, $|AB| = 2$, $|DV| = 1$. Aria triunghiului VAB este 1 (fig. 14). Aria dreptun-

ghiului care are lungimea $|AB|$ și lățimea $|DV|$ este 2. Deci aria parabolei cuprinsă sub axa Ox care este S va fi cuprinsă între 1 și 2. 54. E-

cuatiile să aibă o rădăcină comună: se găsește $m = -2$. 55. Se arată că

ecuația $x^2 - 3x - p = 0$ nu are rădăcini raționale. 56. Se duc paralele la axa yy' prin punctele $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ (fig. 15). Aria se aproximează

prin ariile a două trapeze dreptunghice și a două triunghiuri dreptunghice și aria dreptunghiului care are ca bază segmentul $|AB|$ și înălțimea $|CD|$.

57. $y_{\min} = \frac{m^2 - 10m + 9}{-4}$; $y_{\min} > -7$; $m \in (5 - 2\sqrt{11}, 5 + 2\sqrt{11})$. 58.

$x_v = \frac{m+7}{m} = 1 + \frac{7}{m}$, $y_v = -14 - \frac{49}{m}$ deci $m = \pm 1$, $m = \pm 7$. 59. Se pun

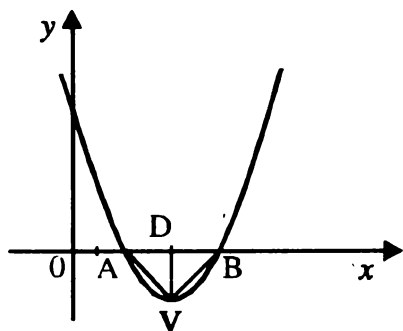


Fig. 14

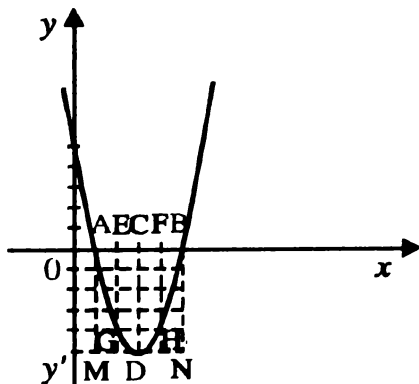


Fig. 15

condițiile $a < 0$, $y_{\min} < 0$; $m - 1 < 0$;

$y_{\min} = \frac{4m+5}{1-m} < 0$, se obține $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right)$. 60. I) $y_{\min} < 0$, $y_{\min} = -(m+1) < 0$ deci $m \in (-1, +\infty)$; II) $\Delta = 0$, $m = -1$; III) $x_{\min} = m - 1$; $y_{\min} = -(m+1)$ și dreapta este $y = -x - 2$. 61. I) $\Delta > 0$, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$; $\Delta = 4$; II) Se pun condițiile $\Delta > 0$, $af(1) > 0$, $-\frac{b}{2a} < 1$ se obține $m \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

62. Se pun condițiile $a > 0$ și $\Delta < 0$; $m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
 $\Rightarrow m \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. $m \in (1, +\infty)$. 63. Condițiile care se pun sunt $\Delta < 0$

și $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S < 0$, $P > 0$. Se obține $m \in (1, +\infty)$. 64. Se pun condițiile de la ex. 62; $m \in \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. 65. Se pun condițiile de mai

sus; $m \in (1, +\infty)$. 66. $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$. 67. Se pun

condițiile $\Delta < 0$ și $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S > 0$, $P > 0$. 68. $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(1, \frac{5}{3}\right)$. 69. Se pun condițiile $\Delta \leq 0$, $a < 0$; $m \in (-\infty, -1]$. 70. f_m sur-

jectivă pentru orice $m \in \mathbf{R}$; f_m injectivă pentru orice $m \geq 0$. Pentru $m \geq 0$

f_m este inversabilă și $f_m^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{m - \sqrt{m^2 + 4(1-x)}}{2}, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$. 71. Cele

două ecuații au aceleași soluții deci $\frac{m}{n-1} = \frac{3m-4}{n-1} = \frac{-6(m-1)}{3(2n-4)}$; se ob-

ține $m = 2$, $n = \frac{5}{3}$. **72.** Se procedează ca la exercițiul de mai sus; $m = 2$,

$n = 1$. **73.** Pentru a fi îndeplinită condiția, ecuațiile trebuie să aibă o rădăcină comună sau două. Două nu pot să aibă deoarece coeficienții nu sunt proporționali. Pentru prima condiție $m_1 = -19$, $m_2 = 5$. **74.** Ecuațiile au o rădăcină comună; $m_1 = -1$, $m_2 = -2$; se verifică că $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$. **75.**

$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{2\}$. **76.** $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a > 1$. **77.** Pentru $\Delta \geq 0$, fie $z = x - 1$

și obținem o ecuație în z , cu rădăcinile $z_1 = x_1 - 1$, $z_2 = x_2 - 1$. Avem: a) $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 1$ dacă și numai dacă $z_1 \geq 0$, $z_2 \leq 0$; b) $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$ dacă și numai dacă $z_1, z_2 \geq 0$. Deci problema se reduce la studiul semnelor ecuației în z . Se obține $m \in (-\infty, -2]$. **78.** $m \in [-3, -2\sqrt{2})$. **79.** $\Delta < 0$, iar

pentru $\Delta \geq 0$ vezi indicația de la ex. 77; $m \in (-2, +\infty]$. **80.** $m \in [2\sqrt{2}, 3]$.

81. $m \in (-\infty, 0]$. **82.** $\Delta < 0$; $m \in (0, +\infty]$. **83.** Discriminantul ecuației este pozitiv; suma și produsul rădăcinilor sunt pozitive. **84.** Se arată că $\Delta \geq 0$;

$\Delta = [a^2 + (b-c)^2][a^2 + (b+c)^2]$. **85.** $x_1 < 2 < x_2$; $m \in \left(-\infty, -\frac{22}{3}\right] \cup (5, +\infty)$.

86. $m \in [-1, 1]$. **87.** Pentru $\Delta \geq 0$, fie $z = \frac{x-1}{x+1}$ unde -1 și 1 sunt capetele

intervalului și obținem o ecuație în z cu rădăcinile $z_1 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$,

$z_2 = \frac{x_2-1}{x_2+1}$. Avem: a) $z_1 \in (-1, 1)$ și $z_2 \notin [-1, 1)$ dacă și numai dacă $z_1 <$

< 0 , $z_2 \geq 0$; b) $z_1, z_2 \in (-1, 1)$ dacă și numai dacă $z_1, z_2 < 0$. Deci problema se reduce la studiul semnelor ecuației în z . Se obține $m \in [-1, +\infty)$.

88. $m \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right]$. **89.** $f(-1)f(1) < 0$; $m \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$. **90.** $\Delta < 0$, iar pt.

$\Delta \geq 0$ vezi indicația de la ex. 87, $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **91.** $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq$

≥ 0 atunci $\Delta_3 \geq 0$, $\Delta_1 = b^2 - 4ac$; $\Delta_2 = b^2 - 4a'^2c^2$, $\Delta_3 = b^2b'^2 - 4aa'cc'$. Se obține $b^2b'^2 - 4b^2a'c' - 4acb'^2 + 16aca'c' \geq 0 \Rightarrow b^2b'^2 - 4aa'cc' \geq 4a'c'b' +$

$+ 4acb'^2 - 20aa'cc' \geq 0$ și ținând cont de $b^2 - 4ac \geq 0$ și $b'^2 - 4a'c' \geq 0$ se obține $\Delta_3 \geq 0$. **92.** $x_1 < x_2 < 1$; $m \in (-\infty, -1)$. **93.** $0 < x_1 < x_2 < 1$; $m \in \left(\frac{5}{4}, 2\right)$. **94.** $\Delta < 0$ sau $x_1 < 0 < 1 < x_2$; $0 < 1 < x_1 < x_2$; $x_1 < x_2 < 0 < 1$; $m \in (-2, 3) \setminus \{-1, 2\}$. **95.** $5 < x_1 < x_2 < 7$; $5 < x_1 < 7 < x_2$; $x_1 < 5 < x_2 < 7$; $m \in [5, 5.4]$. **96.** Valorile lui m obținute din $\Delta \leq 0$ se reunesc cu cele date de condițiile: $\Delta > 0$ și $x_1, x_2 \notin (-1, 1)$. Găsim $m \in \left[-1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right]$.

99. Cum $x^2 - |x| + 1 > 0$ există $x_1 \in A$, x_1 pozitiv. Fie $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Deci x_n este pozitiv și cum $x_n^2 - x_n + 1 \in A$ rezultă $x_n^2 - x_n + 1 \leq x_n$, de unde $x_n = 1$; așadar $x_{n-1} < 1$. Dacă $x_n \geq 0$, atunci $x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 \in A$ și, cum $x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 > x_{n-1}$ avem că $x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 = 1$; deci $x_{n-1} = 0$. Dacă $x_{n-1} < 0 \Rightarrow x_{n-1} = -1$. Se deduce imediat că $A \subseteq \{-1, 0, 1\}$. **100.** Sistemul are soluție unică: $x = 2, y = 1$. **101.** a) $x = 1, y = 2$; b) $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{9}$; $y_2 = \frac{5}{27}$; c) $x_1 = 1, y_1 = 2$; $x_2 = \frac{11}{4}$, $y_2 = \frac{9}{8}$; d) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $y_1 = -\frac{13}{3}$; $x_2 = 1, y_2 = -1$. **102.** a) $x_1 = 2, y_1 = 1$; $x_2 = -2, y_2 = -1$; $x_3 = \frac{7}{5\sqrt{7}}, y_3 = \frac{19}{5\sqrt{7}}$; $x_4 = -\frac{7}{5\sqrt{7}}, y_4 = -\frac{19}{5\sqrt{7}}$; b) $x_1 = 1, y_1 = 2$; $x_2 = -1, y_2 = -2$ etc.; c) $x_1 = 3, y_1 = 4, x = y = z = -\frac{1}{2}x_2 = -3, y_2 = -4$; d) $x_1 = 1,$

$y_1 = 6; x_2 = -1, y_2 = -6$; e) $x = \frac{p}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}, y = \frac{q}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$; f) $x = 1, y = 1$; g) $x_1 = 2, y_1 = 1$; $x_2 = -1, y_2 = -2$; h) $x_1 = 16, y_1 = 4$; $x_2 = 4, y_2 = 16$; i) $x_1 = 2, y_1 = -5; z_1 = -4; x_2 = -2, y_2 = -1, z_2 = 0$; j) $x = 3, y = 3, z = 3$; k) $x_1 = 2, y_1 = -1, z_1 = -3; x_2 = -2, y_2 = 1, z_2 = 3$. **104.** $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{b+c}{bc}\right)$; $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{a+c}{ac}\right)$; $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$. **105.**

Se substituie x din ecuația a doua în prima și se obține $2y^2 - 2y(a - z) + z^2 + a^2 - z(1 + 2a) = 0$. Se pune condiția ca ecuația în y să aibă o singură soluție reală deci $\Delta_y = 0$ și se obține $-4(z^2 + a^2) + 8z(1 + a) = 0$. La fel $\Delta_z = 0$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}; z = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$. **106.** Se substituie z din prima ecuație în ecuația a doua $\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0$, adică $x = 1, y = 1$ și

$z = -1$. **107.** $a = \frac{5}{2}; \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right); \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$. **108.** Pentru $a = \pm 1$

sistemul are 3 soluții, iar pentru $a = \pm \sqrt{2}$ are 2 soluții. **109.** a) $x = 5,$

$y = 7$; b) $x_1 = 2, y_1 = -3; x_2 = 3, y_2 = -2$; c) $x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{5}; x_2 = \frac{1}{5}, y_2 =$

$= \frac{1}{2}$. d) $x_1 = 2, y_1 = 5; x_2 = 5, y_2 = 2$; e) Se descompun primii membri ai

ecuației și se formează patru sisteme de ecuații; se obține: $x_1 = 0, y_1 = 0$;

$x_2 = 1, y_2 = 1; x_3 = -1, y_3 = -1; x_4 = -\sqrt{3}, y_4 = \sqrt{3}; x_5 = \sqrt{3}, y_5 = -\sqrt{3}$;

f) $x_1 = 1, y_1 = 2; x_2 = 2, y_2 = 1$; g) $x = 1, y = 1$; h) Se împart cele două

ecuații și se ajunge la ecuația $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ și se obțin soluțiile $x_1 =$

$= 2, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 2$; i) $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = a; x_2 = 0, y_2 = a, z_2 = 0$;

$x_3 = a, y_3 = 0, z_3 = 0$. **110.** (1, 1). **111.** (2, -3, 3); (1, 0, 0). **112.** $a < -1$.

113. Se împarte prima ecuație la celelalte două și se obțin ecuațiile $y =$

$= 2x, z = 3x$. Se substituie în prima ecuație și se găsește $x = \frac{1}{\sqrt[10]{648}}, y =$

$= \frac{2}{\sqrt[10]{648}}, z = \frac{3}{\sqrt[10]{648}}$. **114.** Se ridică la puterea p șirul de rapoarte egale,

se aplică proprietatea șirului de rapoarte egale și se obține: $\frac{x_k^p}{a_k^p} = \frac{b^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}$

deci $x_k = \frac{a_k b}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p}}$. **115.** a) Se rezolvă ecuația a două ținând cont de

prima și se obține $x = 1, y = 1$ etc.; b) Se ține cont de cazurile $x < 1, y <$

$< 1; 1 < x < 2, y < 1; x > 2, y > 1; x < 1, y > 1; 1 < x < 2, y > 1; x > 2,$

$y > 1$ și se obține $x_1 = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}, y_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ etc. **116.** $x_1 = x_2 = \dots =$

$= x_{10} = 1$. **117.** Se înmulțesc ecuațiile între ele și se obține: $x_1 \cdot x_2 \dots x_n =$

$= \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n}$; se împarte ecuația obținută cu fiecare ecuație în parte și

se obține $x_i = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n}}{a_i}}$. **118.** Scriem $2\sqrt{x_1 - 1} + 2 \cdot 2\sqrt{x_2 - 2^2} +$

$+ \dots + 2n \sqrt{x_n - n^2} = x_1 + x_2 + \dots + x_n; (\sqrt{x_1 - 1} - 1)^2 +$

$+ (\sqrt{x_2 - 2^2} - 2^2)^2 + \dots + (\sqrt{x_n - n^2} - n^2)^2 = 0$. Se egalează fiecare

termen cu zero. **120.** $A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2x^2 - 2ax + a^2)$; $y_m = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$. **121.** Se

aplică relația lui Stewart în $\triangle MBC$, $MD = x$ (fig. 16).

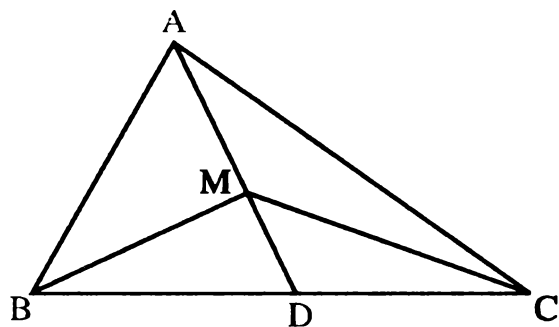


Fig. 16

$MB^2 \cdot CD + MC^2 \cdot BD = MD^2 \cdot BC +$
 $+ BD \cdot DC \cdot BC$. $AD = m$. $MB^2 +$
 $+ MC^2 = 2MD^2 + 2BD^2$. Adu-
 nând MA^2 la ambii membri, se
 obține $MA^2 + MB^2 + MC^2 =$
 $= MA^2 + 2MD^2 + 2BD^2$; $MA^2 +$
 $+ MB^2 + MC^2$ va fi minimă când
 $MA^2 + 2MD^2 = (m - x)^2 + 2x^2$
 este minimă ($BD = ct.$) $\Rightarrow x =$

$= \frac{m}{3} \Rightarrow MD = \frac{AD}{3}$. **122.** Se notează: $d(A, M) = x$, $d(M, B) = 20 - x$ și se

găsește $x_1 = 200$ m, $x_2 \approx 10,5$ ($y_1 = \frac{100k}{x^2}$, $y_2 = \frac{81k}{(20-x)^2}$, reprezentând

intensitatea luminoasă a sursei A, respectiv B). **123.** O centrul cercului. Se notează $OM = x$, $MB = 10 - x$. Se găsește $A \leq 50\pi \text{ cm}^2$ (deci M coin-

cide cu O (centrul cercului)). **124.** $R_1 = \frac{x}{2}$, $R_2 = \frac{20-x}{2}$, $A = \frac{\pi x^2}{4} +$

$+ \frac{\pi(20-x)^2}{4}$; aceasta este minimă ($A \geq 50\pi$) pentru $x = 10$ (fig 17).

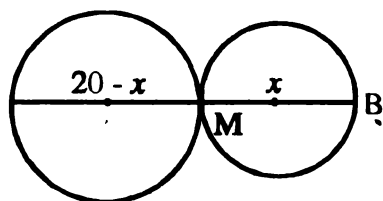


Fig. 17

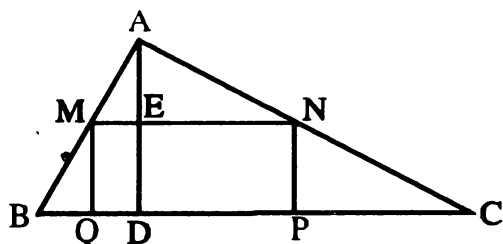


Fig. 18

125. $A = Ll = 60L - L^2$, $L^2 - 60L + A = 0$, $L \in \mathbf{R}$; $A \leq 900 \text{ m}^2$; pentru $L = 30$, $l = 30 \text{ m}$. **126.** Se notează $|BC| = a$, $|AD| = h$, $|PQ| = x$, $|MQ| = y$, $|AE| = h - y$ (fig 18). $A_{\text{MNPQ}} = xy$ și se obține din asemănarea triunghiurilor, $x = \frac{a}{h}(h - y)$. Atunci $ay^2 - ayh + Ah = 0$, se pune condiția ca

$\Delta \geq 0$ și se obține $\Delta \geq \frac{ah}{4}$ și aceasta pentru $y = \frac{h}{2}$ (tăierea se face la jumătatea înălțimii).

127. $P = 2L + 2l$, $A = Ll$ și se obține $2l^2 - Pl + 162 = 0$, $L \in \mathbf{R}$; se pune condiția ca $\Delta_l \geq 0$ și se obține $P \geq 36$, $P = 36$ pentru $l = 9$ și dreptunghiul devine pătrat în acest caz. **128.** Se notează cu x , y minimum de zile în care se poate transporta marfa prima mașină, respectiv a doua mașină. Se obține $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ și $2400x + 5400y = k$

(cantitatea de benzină măsurată). Se obține $2400x^2 + 15000x = k(x - 5)$. Se pune condiția ca $\Delta \geq 0$ și se obține k (minim) = 720 litri pentru $x =$

$= 12\frac{1}{2}$ zile și $y = 8\frac{1}{3}$ zile. **129.** Notăm $AC = x$, atunci $BC = 7 - x$, $AD = y$ și $BD = 5 - y$ ($D \in |AB|$, (fig 19); se găsește $I = \frac{\sqrt{-24x^2 + 168x - 144}}{5}$ și $A = \sqrt{-6x^2 + 12x - 36}$. Aria maximă adică $A =$

$= \frac{5\sqrt{6}}{2}$ dacă $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, și $I = \sqrt{6}$. **130.** Fie înălțimea AD (fig 20).

Notăm: $BD = x$, $BC = m$.

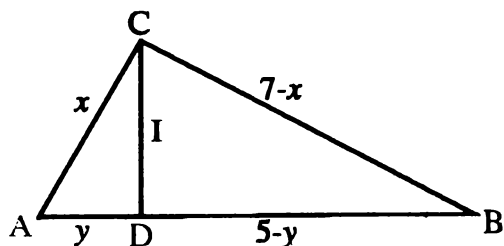


Fig. 19

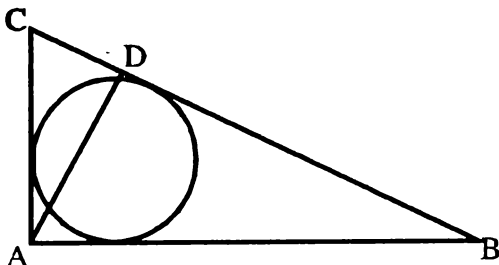


Fig. 20

Perimetru este $2p$. Dacă S este aria atunci $S = rp \Rightarrow r = \frac{S}{p} \cdot r$ va fi

maximă când $S = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{x(m-x)m}}{2}$ va fi maxim. $x(m-x)m^2 =$
 $= -m^2x^2 + m^3x$ va fi maxim pentru $x = -\frac{m^3}{-2m^2}$, $x = \frac{m}{2}$; $BD = \frac{BC}{2}$.

131. Se arată că $x \geq \sqrt{2} \Rightarrow y \geq \sqrt{2}$, $z \geq \sqrt{2}$. Analog se arată că sistemul admite și soluția $x = y = z = -\sqrt{2}$. **132.** Se observă mai întâi că x, y, z , au același semn. Se deduce apoi că $x = y = z$, de unde $x = y = z = \frac{1}{2}$ și $x = y = z = -\frac{1}{2}$. **133.** a) Se arată că $x \geq 3 \Rightarrow y \geq 3$ și $z \geq 3$. Prin adunarea ecuațiilor rezultă că $x = y = z = 3$. b) $(-1, -1, -1)$.

Capitolul VI PUTERI ȘI RADICALI

1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{144}{121}$; c) $\frac{82}{3}$; d) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $\frac{(3x-2y)(a+b)}{a^2b^2+y}$; b) $\frac{xy(b-a)}{ab}$;
 c) $\frac{x+y}{x-y}$; d) $\frac{1}{a-1}$; e) $\frac{(b-a)^3+a^3}{(b-a)^4}$. **3.** a) $\frac{9}{24}$; b) $\frac{16}{9}$; **4.** $80xyz(x^2 +$
 $+ y^2 + z^2)$. **8.** $16[ab(a^2 + b^2) - cd(c^2 + d^2)]$. **11.** a) primul este mai mare;
 b) primul este mai mare; c) primul este mai mare; d) sunt egale; e) pri-
 mul este mai mare. **13.** Dacă n este par funcția nu este injectivă și nici
 surjectivă; dacă n este impar funcția este injectivă și surjectivă. **15.** a) $|x +$

+ 2|; b) $\|x| - 3|$; c) $|-2x^2 + 3x - 1|$; d) $\|x^2| - 3x + 2|$. 16. a) Dacă $x < -2$ suma este $-2x$; dacă $x \in [-2, 2]$ suma este 4; dacă $x > 2$ suma este $2x$; b) dacă $x < -3$ suma este -5 ; dacă $x \in [-3, 2]$ suma este $2x + 1$; dacă $x > 2$ suma este 5; c) dacă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$ suma este $3x^2 - 2x +$

+ 3; dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ suma este $-x^2 + 4x + 1$. 17. Vezi exercițiul 16.

18. a) $x \in [1, +\infty)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$; c) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$; d) $x \in \mathbf{R}$; e) $x \in$

\mathbf{R} ; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$; h) $x \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right]$; i) $x \in [1, 2] \cup$

$\cup [3, +\infty)$; j) $x \in [5, +\infty)$; k) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$; l) $x \in [-2, +\infty)$;

m) $x \in (-\infty, -9] \cup [5, +\infty)$. 19. a) al doilea; b) al doilea; c) egale;

d) primul; e) al doilea; f) al doilea; g) primul. 20. a) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[12]{280}$;

b) $\sqrt[4]{54}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt[12]{75}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{3}$. 21. minus; plus; minus; minus;

dacă $m > n^2$, este pozitiv, iar dacă $m < n^2$, este negativ. 22. a) primul;

b) al doilea. 23. a) $6(7\sqrt{10} - 29)$; b) 1. 24. a) Se ridică ambii membri la

pătrat; b) Membrul stâng este egal cu $\frac{1}{\sqrt[8]{5\sqrt{5}}} \sqrt[8]{2 - \sqrt[5]{32}}$, iar membrul

drept este egal cu $\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}} (1 + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3^2})$. 25. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. 26. $\sqrt{7} + \sqrt{2}$. 27.

$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \cdot 1} \leq \frac{1}{2}[(4a+1)+1] = 2a+1$. La fel $\sqrt{4b+1} \leq 2b+1$,

$\sqrt{4c+1} \leq 2c+1$. Adunăm apoi inegalitățile membru cu membru.

28. a) $\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$; b) $\frac{(x-2)\sqrt{x+4}}{(x+2)\sqrt{x-4}}$; c) $\frac{x+\sqrt{y+2}}{x-1}$. 29. Numărătorul

se mai poate scrie $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1})$. După simplificare se obține $a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1}$ și ținând cont de $a > b > 0$ se obțin inegalitățile. Făcând $a = n+2$, $b = n+1$ și $m = n+1$ obținem $(n+1)(n+2)^n > (n+2)^{n+1} - (n+1)^{n+1}$, de unde $(n+1)^{n+1} > (n+2)^n$, deci

$$\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n+1]{n+2}. \quad 30. \text{ a) } \sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \sqrt[4]{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+1);$$

b) $3+2\sqrt{2}$; c) $4-2\sqrt{3}$; d) $\sqrt{5}-2$; e) $\sqrt{3}-1$; f) $5+3\sqrt{2}$. 31. Se aplică formula radicalilor compuși și se arată că numărul este 6.

$$32. \text{ a) } \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}; \quad \text{b) } \frac{5(\sqrt[3]{4}+\sqrt{3})(2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{4}+9)}{-23};$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{2}-1; \quad \text{d) } \frac{1+\sqrt[3]{2}}{3}; \quad \text{e) } \frac{\sqrt{6}(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{6}; \quad \text{f) } \frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{6}+12}{23}.$$

35. $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 1,6+1,2=2,8 < 2\sqrt[3]{3}$. 36. Se aplică formula radicalilor compuși și se obține numărul egal cu $\frac{7}{13}$. 37. Se aplică formula

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. 39. a) Se notează numărul cu u și se ridică la puterea a treia de unde $u = 2\sqrt{2}$; b) $u = -2$; c) $u = 2\sqrt{2}$; d) $u = 1$.

$$40. \text{ a) } \frac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}; \quad \text{b) } (\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{3})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}); \quad \text{d) } \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2};$$

$$\text{c) } \frac{(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}-1)\sqrt{5}}{10}; \quad \text{e) } \sqrt{(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})(5\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{25}+9)};$$

$$\text{f) } -\frac{1}{18}(\sqrt[3]{3}+\sqrt{3})(3\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}+9); \quad \text{g) } \frac{3-\sqrt[4]{27}}{6}; \quad \text{h) } -\frac{1}{252}(\sqrt[3]{9}+9).$$

41. Punem $\sqrt[3]{a}=u$, $\sqrt[3]{b}=v$, $\sqrt[3]{c}=w$ și folosim identitatea $u^3+v^3+w^3-3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-vw-wu-uv)$. Obținem

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Mai departe înmulțim numărătorul și numitorul ultimei fracții cu $(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. 42. Se poate proceda ca la exercițiul precedent.

43. I) Pentru raționalizare se aplică formula $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$; se obține $\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\dots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^n-b}$; II)

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a(a-1)}. \quad 44. \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} =$$

$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$; $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-1|$; expresia este

egală cu $\frac{2}{2-x}$. 45. a) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$;

$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}}$, dacă $x \in [1, +\infty)$; b) $x = \frac{1}{2}$. 46. Din condițiile de

existență ale rădăcinilor $x+1 \geq 0$, $1-x^2 \geq 0$, $\sqrt[3]{x^2+7}-2 \geq 0$ rezultă $x = -1$, care verifică ecuația. 47. a) Ecuația nu are soluții; b) $x = 3$. 48. a)

$x = \frac{-15-\sqrt{5}}{2}$; b) $x = -\frac{5}{8}$; c) $x = -2$; d) $x = 2 - \sqrt{2}$; e) $x = 2$; f) $x_1 = 3$,

$x_2 = \frac{2}{3}$; g) $x = 3$. 49. $x_1 = a$, $x_2 = -a$. 50. Eliminând radicalii se obține

ecuația $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$, care se mai scrie $(x^2 - x - a)(x^2 + x - a + 1) = 0$. Pentru $a = 0$, $x = 0$. Pentru $a \geq 1$, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$. 51. a)

$x = \frac{16}{25}$; b) $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$; c) $x_1 = \frac{15+4\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 1$. 52. $x = \frac{4-a}{2\sqrt{2(2-a)}}$,

pentru $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$. 53. Dacă $2a + 2b - c \neq 0$, atunci

$x = \frac{(c-a-b)^2 - 4ab}{2(2a+2b-c)}$, cu condiția ca $2x \geq a + b - c$, este o soluție a

ecuației. Dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluții. Dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a = b$, atunci oricare $x > -a$ este o soluție a ecuației. 54. a)

$x = 3$; b) $x = 0$; c) $x = 5$. 55. Pentru $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ecuația

are soluția $x = \frac{1}{2a-1}$. 56. Dacă $c > 0$ și $c^2 \geq |a-b|$ ecuația are soluția

$x = \frac{(c^2+b-a)^2 - 4bc^2}{4c^2}$. Dacă $c = 0$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluție, iar

dacă $c = 0$ și $a = b$, ecuația este nedeterminată. 57. a) $x = 3$; b) $x = 15$.

58. Dacă $(b-c)(a'-a) \neq 0$, ecuația are soluția $x = \frac{c-b'}{a'-a} = \frac{b-c'}{a'-a}$, cu condiția ca numerele de sub radicali să fie pozitive (adică, $a' - a$, $ca' -$

- ab' și ba' - ac' să aibă același semn). Dacă $b = c$ și $b' = c'$ ecuația este nedeterminată. Dacă $a = a'$ și $b \neq c$ sau măcar $b' \neq c'$ ecuația este imposibilă. **59.** Ecuația are ca soluție $x = 1 + \frac{a^2(2-a)^2}{4(a-1)^2}$, pentru $a \in (1, 2]$.

60. $x = \frac{n}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1}$, dacă $a, b \neq 0$, n impar. Dacă n este par, ecuația are

aceeași soluție x , când $ab > 0$ și $a < b$. **61.** Rezultă din identitatea $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = \frac{1}{2}(u+v+w)[(v-w)^2 + (w-u)^2 + (u-v)^2]$, în care se înlocuiește u, v, w respectiv cu $\sqrt[3]{E(x)}, \sqrt[3]{F(x)} - \sqrt[3]{G(x)}$. **62.** Se folosește

problema 61 și se găsește $x^2 = \frac{(a+b)^2(a-b)}{27b}$, pentru $b \neq 0$. Dacă $b = 0$

și $a \neq 0$ ecuația nu are soluții, iar dacă $a = b = 0$ ecuația este nedeterminată. **63.** După problema 59 orice soluție a ecuației date este soluție a ecuației $(3x+a+b+c)^3 = 27(x+a)(x+b)(x+c)$ sau $9[(a^2+b^2+c^2)-(ab+ac+bc)]x = 27abc - (a+b+c)^3$. **64.** a) Se notează

$\sqrt[3]{2-x} = a\sqrt[3]{7+x} = b$ și se aplică formula $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a+b}$. Se

obține $x = 1$; b) Se procedează analog ca la exercițiul precedent. Se obține $x = 3$; c) Se aplică exercițiul 61 și se obține $x = -1$; d) $x = -\frac{3}{13}$.

65. Démonstrația este analoagă celei de la exercițiul 61. **66.** Se aplică exercițiul 65 și se obține $x = -\frac{19}{27}$. **67.** II) Scriem ecuația astfel

$x - \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} = \sqrt{a-x}(\sqrt{b-x} + \sqrt{c-x})$. Pentru ca un număr x

diferit de a, b, c să fie soluție a ecuației date este necesar și suficient ca el să fie soluția ecuației obținută prin ridicarea la pătrat a celor doi membri ai ecuației scrise ca mai înainte, $x - \frac{\alpha}{2a} = \sqrt{b-x}\sqrt{c-x}$ și să

verifice condiția $x > \sqrt{b-x}\sqrt{c-x}$, sau încă să fie soluție a ecuației $\left(x - \frac{\alpha}{2a}\right)^2 = (b-x)(c-x)$ și să verifice condițiile: $2 < b, x < c, x > \frac{\alpha}{2a}$.

68. Eliminând radicalul obținem:

$$\left[x^2 + (2a-1)x + \frac{1}{16} \right] \left[x^2 + (2a+1)x + \left(2a + \frac{17}{16} \right) \right] = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2} \right)^2 - \frac{1}{16}}. \quad \mathbf{69. a)} \text{ Se ridică la puterea a treia ambii}$$

membri ai ecuației. Se obține $x = 25$; b) $x = 1$; c) $x = 4$; d) $x = 9$. **70. a)** Se notează $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = t$ și se obține ecuația $t^2 - 2t + 1 = 0$. Avem $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x = 1$; c) $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. **71.** Ecuația nu are soluții. **72. a)**

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \text{ b) } x_1 = 1, x_2 = 3; \text{ c) nu are soluții; d) } x_1 = -\sqrt{6},$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{55}}{3}. \quad \mathbf{73.}$$
 Ecuația nu are soluții. **74. a)** $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\frac{9}{7}$;

$$\text{b) } x = 2; \text{ c) } x = 8; \text{ d) } x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2, x_3 = \frac{-2 + \sqrt{5}}{3}, x_3 = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}; \text{ e) } x =$$

-1 . **76. a)** Din condițiile de existență ale rădăcinilor rezultă că ecuația nu are soluții; b) Scriem condițiile de existență ale radicalilor: rezultă $x = 6$. **77. a)** Se notează $2 - x = u^3$, $x - 1 = v^2$ și se obține sistemul $u + v = 1$, $u^3 + v^2 = 1$, de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 1$; b) Se procedează ca la punctul a) și se obține $x_1 = 3$, $x_2 = 4 - (-1 + \sqrt{3})^3$, $x_3 = 4 + (1 + \sqrt{3})^3$;

c) $x = 25$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **78.** $x_1 = 7$; $x_2 = 38$. **79. a)** Se notează

$\sqrt[5]{x + \sqrt{x^2 - 1}} = t$ și se obține ecuația $t^2 + 2t + 1 = 0$. Rezultă $x = 1$;

b) Ecuația se poate scrie $\left(\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}} - \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} \right)^2 = 0$. Dacă notăm

$\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+a}} = t$, se obține $t = \pm \frac{1+a}{1-a}$, de unde $x = -a$; c) Se aduce la același

numitor și se obține $x = \frac{a(\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b})^7}{1 - (\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b})^7}$; d) $\frac{2x+1}{ax-1} \geq 0$ și se obține o

sumă de trei numere pozitive care nu poate fi egală cu zero. Deci ecuația nu are soluții; c) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuației și

se obține $x = \pm \sqrt{\frac{8a^3 + 15a^2b + 6ab^2 - b^3}{2+b}}$; f) $\frac{15a^2b - b^3 + 6ab^2 + 8a^3}{27b}$.

80. a) Se împarte ecuația cu $\sqrt[n]{x^2 - 1}$. Se obține $x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$, $x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$;

b) Se împarte ecuația cu $\sqrt[n]{1 + x^3}$ și se notează $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x+x^2}} = t$. Se obține

ecuația $t^2 - t - 1 = 0$, de unde se obțin ecuațiile $\frac{1+x}{1-x+x^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și

$\frac{1+x}{1-x+x^2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; c) Se împarte ecuația cu $\sqrt[n]{a^2 - x^2}$ și se notează

$\sqrt[n]{\frac{x+a}{a-x}} = t$. Se obține $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ și ecuațiile $\frac{x+a}{a-x} = 2^m$; $\frac{x+a}{a-x} = 1$;

d) Ecuația se scrie $\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^2} - 2\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^2} = \sqrt[4]{1-(\sqrt{x})^2}$ și se împarte

cu $\sqrt[4]{1-(\sqrt{x})^2}$. Se notează $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = t$, se obține ecuația $t^2 - t - 2 = 0$,

de unde $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = 2$;

e) Ecuația se mai poate scrie: $\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^2} - 2\sqrt[4]{(1-\sqrt[3]{x})^2} = \sqrt[4]{1-(\sqrt[3]{x})^2}$.

Se împarte ecuația cu $\sqrt[4]{1-(\sqrt[3]{x})^2}$ și se obține aceeași ecuație în t ca la

punctul d); f) se procedează ca la punctele anterioare. **81.** Dacă $a = 0$,

$x \in (-\infty, 0)$; dacă $a > 0$, $x \in [a, +\infty)$; dacă $a < 0$, $x \in (-\infty, a]$. **82.** a) $x \in$

$(-\infty, 5] \cup [50, +\infty) \cap (14, +\infty) \cap (2, +\infty)$, de unde $x \in [50, +\infty)$; b) $x \in$

$(-\infty, -7] \cup [0, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{29}{2}\right) \cap \left(-\infty, \frac{841}{144}\right)$, de unde $x \in (-\infty, -7)$;

c) $x \in (2, +\infty)$; d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$. **83.** a) $x \in (34 + \sqrt{1188}, +\infty)$;

b) $x \in \left(-2, \frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(-1, \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)$; c) $x \in [-6, 0) \cup (3, 4]$; d) $x \in$

$\in \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, 1 \right)$. **84.** a) Din condițiile de existență ale rădăcinilor rezultă $x_1 =$

$= 5$; b) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \setminus \{7 - \sqrt{40}, 7 + \sqrt{40}\}$; c) $x \in \left[-7, -6 + \sqrt{4\sqrt{5} - 8} \right)$

d) $x \in \left[-1, \frac{11}{4} \right)$; e) $x \in (10, +\infty]$; f) Din condițiile de existență ale radi-

calilor rezultă $x \in [3, +\infty]$. Prin ridicare la pătrat se obține $35x^2 - 37x + 21 > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$; deci $x \in [3, +\infty]$; g) Din condițiile de existență ale

radicalilor $\Rightarrow x \in [1, +\infty]$. Inecuația: $\frac{1}{|\sqrt{x-1}+1|} + \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|} > 2$. Dacă

$x \in (1, 2)$ rezultă inecuația $2 - x < 1$, deci $x \in (1, 2)$. Dacă $x \in (2, +\infty)$,

atunci $x^2 - 5x + 5 < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$. Deci $x \in$

$\in \left(2, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$. În concluzie $x \in \left(1, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right) \setminus \{2\}$. **85.** a) $\sqrt[6]{2^5}$; b)

$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$. **86.** I) 1; II) $-2 \left(\frac{1 - a^2}{1 - \sqrt{a}} \right)^2$; III) $a^{\frac{2}{3}}$. **87.** I) Dacă a, b, c, d sunt

pozitive se obține $4a^2c\sqrt{3d}$. Dacă a, b, c , oarecare și $d > 0$ se obține

$\sqrt{3d} \left[a^2c + a|a| \cdot |c| - a^2 \frac{c^2}{|c|} \right]$; II) $24 a^{\frac{31}{15}} b^{\frac{31}{15}} c^{\frac{1}{15}} d^{\frac{1}{3}}$. **88.** I) Expresia devine

$\sqrt{ab}(a+b) - \sqrt{ab}$. Pentru $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ se obține $\frac{27\sqrt{2} - 18}{25}$; II) -1;

III) $\frac{\sqrt{a}(1+a)}{a}$; IV) Dacă $a, b > 0$, se obține $\frac{2b|a-b|}{a+b-|a-b|}$. Dacă $a, b <$

< 0 , $\Rightarrow \frac{2b|a-b|}{-a-b-|a-b|}$. **89.** a) $41 \leq \sqrt[3]{72351} < 42$; b) $1,5 \leq \sqrt{2,5} < 1,6$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$. **90.** I) Să verificăm de exemplu, inegalitatea din

stânga. $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} <$
 $< \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Analog, se verifică cealaltă inegalitate. II). Acum,

scriem $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} > 1 + 2\left[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000})\right] = 1 + 2(\sqrt{1000001} - \sqrt{2}) > 2 \cdot 1001 - \sqrt{8} + 1 >$
 $> 2000 - 3 + 1 = 1998$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la punctul I), rezultă că numărul este < 2000 . Deci partea întreagă a numărului este 1998. **91.** Analog cu problema precedentă (punctul I), rezultă

$\frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} > 2[(\sqrt{10001} - \sqrt{10000}) +$
 $+ (\sqrt{10002} - \sqrt{10001}) + \dots + (\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000})] = 2(\sqrt{1000001} - \sqrt{10000}) > 2(1000 - 100) = 1800$. Analog rezultă că $s < 1800,02$. Deci $1800 < s < 1800,02$. **92.** I) Avem $\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$, de unde rezultă

$1 + \frac{2}{3n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$. Înmulțind inegalitatea cu $n^{\frac{2}{3}}$, se obține $n^{\frac{2}{3}} + \frac{2n^{\frac{1}{3}}}{3} >$
 $> (n+1)^{\frac{2}{3}}$, de unde $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}\right]$. Analog, plecând de la

inegalitatea $\left(1 - \frac{7}{3n}\right)^3 > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ se obține $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$;

II) Folosim inegalitatea din stânga de la punctul I) și scriem:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}\right) + \left(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{5^2}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\sqrt[3]{(1000001)^2} - \sqrt[3]{(1000000)^2}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{10000002000001} - \sqrt[3]{16}\right) > \frac{3}{2} \cdot$$

$10000 - \sqrt[3]{54} > 15000 - 4 = 14996$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la punctul I), se obține că numărul este < 14997 . Deci partea

întreagă a numărului este 14996. **93.** $(-1, 1)$. **94.** a) $x = \frac{5}{8}, y = \frac{3}{8}$; b) $x = 4, y_1 = 4$ și $x_2 = 5, y_2 = 4$; c) $x = 1, y = 1$; d) $x_{1,2} = \pm \frac{10\sqrt{3}}{3}, y_{1,2} = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $x_{3,4} = \pm 5, y_{3,4} = \pm 4$ (semnele corespund) $x_{5,6} = \pm 10\sqrt{3}, y_{5,6} = \pm 8\sqrt{3}$; $x_{7,8} = \pm 15, y_{7,8} = \pm 12$ (semnele alternează); e) $x_1 = 4, y_1 = 2; x_2 = 2, y_2 = 1$; f) $x = 3, y = 1$.

Capitolul VII NUMERE COMPLEXE

1. a) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}$; b) $x = 1, y = 1$; c) $x = 0, y = 0$; d) $x = -2, y = 8$;
e) $x_1 = \sqrt{17}, y_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\sqrt{17}, y_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \sqrt{7}, y_3 = 3; x_4 = -\sqrt{7}, y_4 = 3$; f) $x_1 = a, y_1 = b; x_2 = \frac{3a - 4b + 2}{5}, y_2 = \frac{-4a - 3b + 14}{5}$. **2.** a) $3 - 4i; 3 + 4i; 2 - 11i; 2 + 11i$; b) $18 - 6i, 14 - 3i, 33 - 11\sqrt{2}i$; c) $-\frac{7}{29} + \frac{32}{29}i; \frac{6}{5} - \frac{8}{5}i; \frac{52}{145} + \frac{44}{145}i; \frac{61}{13} + \frac{4}{13}i$; d) $-1 + 3i$; **1. 5.** a) $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Dacă $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = 1$ dacă $n = 3k$; $\varepsilon_1^n = \varepsilon_1, \varepsilon_2^n = \varepsilon_2$ dacă $n = 3k + 1$; $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2, \varepsilon_2^n = \varepsilon_1$ dacă $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$); b) Pentru $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, se obține $-\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$, respectiv $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $-\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$, respectiv $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$; c) $a^3 + b^3$, respectiv $a^2 - ab + b^2$; d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **7.** $z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_1 z_2 = \frac{5}{18} + \frac{\sqrt{2}}{18}i; \frac{z_1}{z_2} = -\frac{6}{5} + \frac{6\sqrt{2}}{5}i; z_1^2 + z_2^2 = -\frac{29}{36} + \frac{7\sqrt{2}}{18}i$;

$$z_1^3 + z_2^3 = -\frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8}i; \quad z_1^4 + z_2^4 = \frac{1}{36^2}(265 - 892\sqrt{2}i); \quad z_2^5 z_1^{-3} = -\frac{5^3}{12 \cdot 6^3} \cdot$$

$$\cdot (1 + \sqrt{2}i). \quad 8. \{z \in \mathbb{C} | z = a + bi, a + b = 1\}. \quad 9. a) -i; b) \frac{8ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}i;$$

$$c) \frac{3a^2 - 1}{4a^2 + 1}(2a - i). \quad 10. a) 2^{100}; b) 2, \text{ pentru } n = 4k; 0, \text{ pentru } n = 4k + 1; -2,$$

$$\text{pentru } n = 4k + 2; 0, \text{ pentru } n = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{N}); c) (1 - i)^n + (1 + i)^n; d) (2 + i)^n + (2 - i)^n. \quad 11. a) 2; b) -1; c) -1; d) 2. \quad 12. a) 2, \text{ pentru } n = 3k; -1,$$

$$\text{pentru } n = 3k + 1; -1, \text{ pentru } n = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{N}); b) -3, \text{ pentru } n = 3k; 0, \text{ pentru } n = 3k + 1; 0, \text{ pentru } n = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{N}); c) -3, \text{ pentru } n = 3k; 0,$$

$$\text{pentru } n = 3k + 1; 0, \text{ pentru } n = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{N}). \quad 13. \text{ Observăm că } i^{4l+1} + i^{4l+2} + i^{4l+3} + i^{4l+4} = 0 \text{ și } (-1)^{4l+1}i^{4l+1} + (-1)^{4l+2}i^{4l+2} + (-1)^{4l+3}i^{4l+3} +$$

$$+ (-1)^{4l+4}i^{4l+4} = 0, \text{ unde } l \in \mathbb{N}. \text{ Obținem } s_1 = 0, \text{ pentru } n = 4k; s_1 = i, \text{ pentru } n = 4k + 1; s_1 = -1, \text{ pentru } n = 4k + 2; s_1 = -i, \text{ pentru } n = 4k + 3. \text{ De asemenea, } s_2 = 0, \text{ pentru } n = 4k; s_2 = -1, \text{ pentru } n = 4k + 1; s_2 = -i - 1,$$

$$\text{pentru } n = 4k + 2; s_2 = -1, \text{ pentru } n = 4k + 3. \quad 14. \text{ Dacă } z = (1 + i)^n + (1 - i)^n, \text{ atunci } \bar{z} = z, \text{ adică } z \in \mathbb{R}. \quad 15. |z| = 16. \quad 16. a) z_1 = 6 + 17i, z_2 = 6 +$$

$$+ 8i; b) z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; c) z_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{4} + \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}i, x_2 =$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{7}}{4} - \frac{1 + \sqrt{7}}{4}i. \quad 19. z_1 = 21 - i; z_2 = \frac{9}{10} - \frac{7}{10}i. \quad 20. a) \{z \mid z = x +$$

$$+ iy, x^2 + (y + 1)^2 - 4 \leq 0\}; b) \{z \mid z = x + iy, x^2 + (y - 2)^2 - 9 > 0\}; c) \{z \mid z = x +$$

$$+ iy, x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}; d) \{z \mid z = x + iy, \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{1}{4} > 0 \text{ și}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{9}{4} < 0\}; e) \{z \mid z = x + iy, x^2 + (y - 1)^2 - 16 > 0\}; f)$$

$$\{z \mid z = x + iy, \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 < 0\}; g) \{z \mid z = x + iy, x < 0\}.$$

$$21. a) x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; b) x_1 = -2, x_2 = 1 + \sqrt{3}i;$$

$x_3 = 1 - \sqrt{3}i$; c) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$, $x_3 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$; d) $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$, $x_3 = -\frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i$; e) $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; f) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3i$, $x_4 = -3i$; g) $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_5 = x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **22.** Interpretarea geometrică. Într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu de două ori suma pătratelor laturilor. **23.** Fie $z = a + bi$, $z' = c + di$. Avem $|z + z'| \leq |z| + |z'| \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$. Mai mult, $|z + z'| \leq |z| + |z'| \Leftrightarrow (ad - bc)^2 = 0 \Leftrightarrow$ există λ , astfel încât $c = \lambda a$ și $d = \lambda b$. **24.** Se folosesc proprietățile modulului. **25.** a) Avem $|z| = 4m^2 + 1 \in \mathbf{Q}$; b) $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, unde $m, n \in \mathbf{Z}$. **26.** $z = (a - b)^k \in \mathbf{R}$. **27.** $A = \{(x, y) \in P \mid x^2 + (y - 2)^2 - 36 = 0\}$. **28.** $B = \{(x, y) \in P \mid (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 8 = 0\}$. **29.** $C = \{(x, 0); \left(-\frac{1}{2}, y\right) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. **30.** $D = \{(x, y) \in P \mid \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0\}$. **31.** $E = \{(x, y) \in P \mid -2x + 4 = 0\}$. **32.** Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale și distincte dacă $\Delta_1 = b^2 - 4ac > 0$. Pentru $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ avem $\Delta_2 = -4a^2\Delta_1 < 0$. **33.** $a \in \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{6}, \frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)$. **34.** $X^4 + X = X(X + 1)\left(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot \left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $X^4 + 16 = (X - \sqrt{2} - i\sqrt{2}) \cdot (X - \sqrt{2} + i\sqrt{2})\left(X + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$. **35.** a) $z_1 = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} + 2i$, $z_2 = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3} + 2i$; b) $z = -\frac{7}{6} + 4i$. **36.** $(1 + ui^{4l+1})(1 + ui^{4l+2})(1 + ui^{4l+3}) \cdot (1 + ui^{4l+4}) = (1 + u^2)(1 - u^2)$, $l \in \mathbf{N}$. Dacă $n = 4k + 1$ sau $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$), produsul este imaginar; dacă $n = 4k + 3$, sau $n = 4k + 4$ ($k \in \mathbf{N}$),

produsul este real. **37.** $\alpha = (u + iv)^n + i^n(u - iv)^n$. Dacă $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$), α este real; dacă $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), α este imaginar. **38.** a) $3x^2 = y^4$; b) $x^2 = 3y^4$. **39.** a) Condiția devine $y^3 - 3x^2y = 0$, $x^3 - 3xy^2 > 64$; b) Condiția devine $x^3 - 3xy^2 = 0$, $|y^3 - 3x^2y| > 64$. **41.** Pentru $z = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}i$, se obține cea mai mare valoare a lui $|z|$, $|z| = \frac{2 + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$. Pentru $z = -\frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}i$, se obține cea mai mică valoare a lui $|z|$, $|z| = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - 2}{2}$. **42.** $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2}$, $z_4 = -\frac{1}{2}$. **43.** Se folosește teorema lui Pitagora. **44.** $A = \{x - (x + 1)i \mid x \in \mathbb{R}\}$. **45.** $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$. **46.** a) $A = \{(x, y) \in P \mid y = 0\}$; b) $B = \{(x, y) \in P \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$. **47.** a) $z = -\frac{2}{37} - \frac{12}{37}i$; b) $z = -\frac{5}{33} - \frac{29}{33}i$; c) $z = \frac{74\sqrt{3}}{337} + \frac{146}{337}i$; d) $z = -\frac{23}{34} - \frac{7}{34}i$. **48.** $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i$. **50.** a) $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}i$; b) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$; c) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -4 - i$; d) $z_{1,2} = \pm\sqrt{2} + i\sqrt{3}$; e) $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 2 - i$. **51.** a) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = i$; b) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$; c) $z_1 = \frac{8 + 19i}{7}$, $z_2 = \frac{-18 + i}{7}$; d) $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + 2i$. **52.** a) $z_{1,2} = 1 + \alpha \pm \alpha(\alpha + 1)i$; b) $z_{1,2} = 1 \pm \alpha i$. **53.** Rădăcinile sunt: 0, $\pm i$, ± 1 . **55.** a) $\frac{1}{X^2 + \sqrt{2X} + 1}$; b) $\frac{X + 1}{X - 1 + i}$; c) $\frac{X^2 - 2X + 5}{X^2 - 4X + 5}$; d) $\frac{X - a + bi}{X + bi}$. **56.** a) $x_1 = \sqrt{5}$, $y_1 = 3$; $x_2 = -\sqrt{5}$, $y_2 = 3$; $x_3 = \sqrt{3}i$, $y_3 = -5$; $x_4 = -\sqrt{3}i$, $y_4 = -5$; b) $x_1 = \sqrt{2}i$, $y_1 = \sqrt{2}i$; $x_2 = \sqrt{2}i$, $y_2 = -\sqrt{2}i$; $x_3 = -\sqrt{2}i$, $y_3 = \sqrt{2}i$; $x_4 = -\sqrt{2}i$, $y_4 = -\sqrt{2}i$; c) $x_1 = 2$, $y_1 = \sqrt{3}i$; $x_2 = 2$, $y_2 = -\sqrt{3}i$; $x_3 = -2$, $y_3 = \sqrt{3}i$; $x_4 = -2$, $y_4 = -\sqrt{3}i$. **57.** a) $x = 1 + i$, $y = i$; b) $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$, $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$; c) $x = -\frac{11}{2} + \frac{7}{2}i$, $y = \frac{51}{6} + \frac{1}{3}i$.

Capitolul VIII

FUNCTIA EXPONENTIALĂ ȘI FUNCTIA LOGARITMICĂ

1. a) Se arată, mai întâi, că $1 + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Dacă $a > 1$, atunci $\Rightarrow a^{1+\sqrt{6}} > a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $0 < a < 1$, atunci $a^{1+\sqrt{6}} < a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $a = 1$, cele două numere sunt egale; b) se arată, mai întâi că $\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2$. Dacă $a > 1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} < a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $0 < a < 1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} > a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $a = 1$, cele două numere sunt egale. 2. a) $x \in (-\infty, -2]$; b) $x \in [-2, +\infty)$; c) $x \in \mathbf{R}$; d) Dacă $a > 1$, atunci $x \in [0, +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (-\infty, 0]$; dacă $a = 1$, atunci $x \in \mathbf{R}$. 3. a) $\text{Im}f_1 = [1, 3]$; b) $\text{Im}f_2 = (0, 1]$; c) $\text{Im}f_3 = [0, +\infty)$; d) $\text{Im}f_4 = (0, 1]$; e) Notăm $2^x = t$ și se utilizează variația funcției de gradul al doilea $f(t) = t^2 - 8t + 18$. Obținem $\text{Im}f_5 = [1, +\infty)$; 4. a) Se consideră separat cazurile: $x - 3 \geq 0$ și $x - 3 < 0$. Obținem $x \in (1, 5)$; b) Se consideră separat cazurile: $x - 4 \geq 0$ și $x - 4 < 0$. Se obține $x \in \mathbf{R}$; c) $x \in \left(1, \frac{5}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; d) Se consideră separat cazurile: $|x| < 1$

și $|x| > 1$. Se obține $x \in (1, 2)$. 6. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; b) $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; c) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; e) Dacă $a > 1$, atunci $x \in (1, +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, 1)$; f) Dacă $b > 1$, atunci $x \in (1, +\infty)$; dacă $0 < b < 1$, atunci $x \in (0, 1)$. 7. Dacă $0 < a < b < 1$ sau $1 < b < a$, $\Rightarrow \log_a b < \log_b a$; dacă $1 < a < b$ sau $0 < a < b < 1$, atunci $\log_a b > \log_b a$; dacă $a = b$, atunci cele două numere sunt egale. 8. a) Dacă $a > 1$, atunci $x \in [1, +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, 1]$; b) Dacă $a > 1$, atunci $x \in (0, \sqrt[3]{a}]$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in [\sqrt[3]{a}, +\infty)$.

10. a) $x = \sqrt[3]{\frac{m^2(m+n)\sqrt{m+n}}{(m-n)^4 n \sqrt{n}}}$; b) $x = \sqrt[4]{\frac{v^3 \sqrt{(u+v)^2}}{u^2 \sqrt{u-v}}}$. 12. $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$. 13. $\log_{30} 16 = 4(1 - a - b)$. 14. Se poate folosi inegalitatea mediilor: $\frac{2ab}{1+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. 17. $\frac{x}{y} \in \{1, 4\}$. 18. $\log_3 4 + \log_{12} 2 = \frac{(1-m-n)(2+m-2n)}{2m(1-n)}$. 19. Să demonstrăm, de exemplu, că $\log_2 3 \notin$

$\notin \mathbf{Q}$. Presupunem, prin absurd, că $\log_2 3 = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, de unde $2^m = 3^n$.

Cum $\log_2 3 > 0$, putem presupune $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Dar egalitatea $2^m = 3^n$, $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ este imposibilă, deoarece membrul stâng este un număr par, iar membrul drept este un număr impar. Prin raționamente analoge se demonstrează că numerele $\log_5 10$ și $\log_{\frac{1}{2}} 5 = -\log_2 5$ sunt iraționale.

20. $b = a^q$, unde $q \in \mathbf{Q}$. **22.** Notăm $\log_2 x = t$ și obținem $f(t) = (t^2 - 6t)^2$. Valoarea maximă a lui f se obține pentru $t = 3$, deci pentru $\log_2 x = 3$, adică pentru $x = 8$. **23.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică (a se vedea exercițiul 26, capitolul IV). **24.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică (a se vedea exercițiul 26, capitolul IV). **25.** Avem că $\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow 3 > 2^{\sqrt{2}}$. Dar inegalitatea $3 > 2^{\sqrt{2}}$ este adevărată, deoarece $2^{\sqrt{2}} < 2^{1.5} =$

$= 2^{\frac{3}{2}} < 3$. Deci $\log_2 3 > \log_3 4$. **26.** Avem $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$, $c = (ab)^z$,
 $\Rightarrow a^{x+1} = (abc)^x$, $b^{y+1} = (abc)^y$, $c^{z+1} = (abc)^z$. **27.** Avem inegalitățile:

$\log_{xy}(yz) + \log_{yz}(xy) \geq 2$, $\log_{yx}(zx) + \log_{zx}(yx) \geq 2$, $\log_{zy}(zx) + \log_{zx}(zy) \geq 2$, care se adună membru cu membru. **28.** Aplicând inegalitatea medii-

lor, avem: $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 \geq 4\sqrt[4]{\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6} =$
 $= 4\sqrt[4]{\log_2 6} = 4\sqrt[4]{1 + \log_2 3} > 4\sqrt[4]{1 + \frac{3}{2}} > 5$. **29.** a) $x = 1$; b) Dacă $a \neq 1$,

atunci $x \in \{-2, 1, 3\}$; dacă $a = 1$, atunci $x \in \mathbf{R}$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$; d) $x_1 =$
 $= -5$, $x_2 = \frac{93}{11}$; e) $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$; f) $x = 2$; g) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; h) nu are

soluții. **30.** a) $x = 3$; b) nu are soluții; c) $x = 3$; d) $x = 1$. **31.** a) $x = 2$; b)
 $x = \frac{1}{2}$; c) $x = 2$; d) $x = 6$; e) $x = 5$; f) $x = 1$. **32.** a) $x = 0$; b) $x = -1$; c) $x =$

$= 2$; d) $x = \lg \frac{217}{285} \cdot 2 \lg \frac{7}{5}$. **33.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; b) $x = 4$; c) $x = \frac{3}{2}$; d)

$x_1 = 3$, $x_1 = \frac{\lg 8}{\lg 6}$; e) $x = 1$. **34.** a) $x = 0$; b) $x = 7$; c) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **35.** a)

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{5}{2}$ d) $x_{1,2} = \frac{2 \lg(5 \pm \sqrt{24})}{\lg 3}$. **36.** a) Se observă

că $(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 1$. Notăm $(4 + \sqrt{15})^x = y$ și se obține ecuația:

$y + \frac{1}{y} = 62$. Se obține $y_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15}$, de unde rezultă $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$;

b) Se procedează ca la punctul a) și se obține $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$; c) Se procedează ca la punctele a) și b). Se obține $x = 3$. **37.** a) Împărțind ambii

membrii ai ecuației cu 6^x , se obține: $\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{13}{6} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$. Notăm

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, de unde rezultă ecuația în y , $6y^2 - 13y + 6 = 0$. Soluțiile ecua-

ției sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; c) $x = 0$; d) $x = 1$; e) Ecuația

dată devine $3 \cdot 3^{2x^2+6x-10} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} \pm 15 \cdot 5^{2x^2+6x-10}$, care este evident de

tipul celor de la punctele precedente. Se obține $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. **38.** a) $x_1 =$

-1 , $x_2 = 1$; b) Din condițiile de existență a radicalilor rezultă că $x \in$

$\{3\} \cup [5, +\infty)$. Se observă că $x = 3$ verifică ecuația, iar pentru $x \geq 5$,

avem $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} > 2$. Deci singura soluție a ecuației este $x = 3$.

39. Dacă $a < 0$, ecuația nu are soluții; dacă $a > 0$ ecuația are soluția

$x = \log_{\frac{2}{3}}(3a)$. Ecuația are soluție întreagă $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a = \frac{2^n}{3^{n+1}}$. **40.** a) E-

cuația se scrie $(x^x - x)(x^x - x^2) = 0$ care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$; b)

$x = -1$, $x \in [0, 1]$. **41.** a) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației.

Împărțind ambii membri ai ecuației cu 5^x , se obține ecuația echivalentă

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Pentru $x < 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$,

iar pentru $x > 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Deci $x = 2$ este

unica soluție a ecuației; b) Din condițiile de existență a radicalilor, avem

$x \geq 3$. Se observă că $x = 3$ este o soluție a ecuației. Mai mult, din mono-

tonia funcțiilor $f_1, f_2 : [3, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $f_2(x) = 2^{\sqrt{x-3}}$, rezultă

că aceasta este unica soluție a ecuației; d) Din condițiile de existență a

radicalilor, rezultă $x \geq 4$. Cum $1 \leq 2 + a \leq 3$ și $1 \leq 2 - a \leq 3$, rezultă că:

$1 \leq (2 + a)^{\sqrt{x-4}}$ și $1 \leq (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} \Rightarrow 2 \leq (2 + a)^{\sqrt{x-4}} + (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}$.

de unde în mod necesar $(2 + a)^{\sqrt{x-4}} = (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 1$, de unde rezultă $x = 4$. **42. a)** Se consideră separat cazurile: $|x| \leq 1$ și $|x| > 1$. Rezultă $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; **b)** $x \in (-\infty, 1]$. **44. a)** $x = 2$; **b)** $x = \sqrt{2}$; **c)** $x_1 = -2, x_2 = 2$; **d)** nu are soluții; **e)** $x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$; **f)** $x \in (0, 2] \setminus \{1\}, x = \frac{5}{2}$. **45. a)** $x = a^a$; **b)** $x = a^{3a^2}$; **c)** $x = c^b$; **d)** $x_1 = 6, x_2 = 14$; **e)** $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}, x_2 = 2^{\sqrt{2}}$; **f)** $x = c$. **46. a)** nu are soluții; **b)** nu are soluții; **c)** $x = 6^{\frac{3}{4}}$; **d)** Ecuația are soluții pentru $a > 0, x = a\sqrt[3]{4a}$; **e)** $x = 0,99$; **f)** $x = 1$. **47. a)** $x = 5$; **b)** $-\frac{\lg 5}{\lg 2}$; **c)** $x = 5$; **d)** $x_1 = \lg 2, x_2 = 0$; **e)** $x = 2$; **f)** $x = 2$; **g)** $x_1 = 1, x_2 = 2$. **48. a)** $x_1 = 10, x_2 = 10^3$; **b)** $x \in \{10^{-2\sqrt{2}}, 10^{-2}, 10^2, 10^{2\sqrt{2}}\}$; **c)** $x \in \{10^{-2}, 10^{-1}, 10, 10^2\}$; **d)** $x_1 = -\frac{9}{10}, x_2 = 9$; **e)** $x_1 = 2^{-8}, x_2 = 2^{27}$; **f)** $x_1 = 2^{-\frac{4}{27}}, x_2 = 2^{\frac{1}{3}}$. **49. a)** $x_1 = 1, x_2 = a^{\frac{1}{m-n}}$. **50. a)** $x_1 = -1, x_2 = 1$; **b)** $x_1 = 3^5, x_2 = 3$; **c)** $x_1 = 10^4, x_2 = 10$; **d)** $x_1 = 1, x_2 = 4$; **e)** $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 5^3$; **f)** $x \in \{2^{-\sqrt{2}}, 2^{-1}, 2, 2^{\sqrt{2}}\}$; **g)** $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 9$; **h)** $x_1 = 3, x_2 = 1$. **51. a)** Utilizând formula de schimbare a bazei, ecuația devine $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$, de unde se obține $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$; **b)** $x = 10^{\lg 3 \lg 5}$; **c)** $x = a^{\frac{2}{5}}$; **d)** $x_1 = 4, x_2 = 2 + 2^{\frac{5}{4}}$; **e)** $x = \frac{1}{32}$; **f)** $x = 2$. **52. a)** $x_1 = 1, x_2 = ac$. **53. a)** Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației. Mai mult, din monotonia funcțiilor $f_1, f_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x + 2^x + \log_2 x, f_2(x) = 7$, rezultă că aceasta este unica soluție a ecuației; **b)** Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației și că aceasta este unică. **54. a)** $x_1 = a^{a^{-2}}, x_2 = a^{a^2}$; **b)** $x = \frac{1}{a^2}$; **c)** $x_1 = a, x_2 = a^{\frac{9}{16}}$. **55. a)** $x = 3, y = 2$; **b)** $x = 4, y = 0$; **c)** $x_1 = 3, y_1 = 1$ și $x_2 = 1, y_2 = 2$; **d)** $x = 1, y = 3$; **e)** $x_1 = \sqrt{2}, y_1 = 2$ și

$x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y_2 = -3$. f) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuații a

sistemului; g) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$. Dacă $a < 1$, $b > 1$, sau $a > 1$, $b < 1$, ecuația a doua a sistemului nu poate fi satisfăcută pentru nici o valoare pozitivă a lui x și y , deci în acest caz sistemul nu are soluții. Să presupunem că $a > 1$, $b > 1$ (sau $a < 1$, $b < 1$). Logaritmăm ambii termeni ai fiecărei ecuații a sistemului și obținem că, pentru $a \neq b$,

$$x = \left(\frac{\lg a}{\lg b} \right)^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}} \text{ și } y = \left(\frac{\lg b}{\lg a} \right)^{\frac{\lg a}{\lg b - \lg a}}, \text{ iar pentru } a = b, \text{ sistemul are o}$$

infinitate de soluții $y = x = \alpha$, cu α real pozitiv. h) Dacă $b = 0$ sau măcar $c < 0$, sistemul nu are soluții. Fie $b > 0$, $c > 0$ și notăm $a^x = u$, $a^y = v$.

Obținem sistemul $u^2 + v^2 = b$, $uv = c$, unde $u > 0$, $v > 0$. Deci u și v sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $z^2 - \sqrt{b+2c}z + c = 0$. În final, se obține că dacă $b - 2c < 0$, sistemul nu are soluții, iar dacă $b - 2c \geq 0$,

$$\text{atunci } x_1 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} + \sqrt{b-2c}}{2}, y_1 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} - \sqrt{b-2c}}{2}, x_2 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} - \sqrt{b-2c}}{2}, y_2 = \log_a \frac{\sqrt{b+2c} + \sqrt{b-2c}}{2}; \text{ i) } x_1 = 2, y_1 = 3$$

$$\text{și } x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = 3; \text{ j) } x_1 = 8, y_1 = 18 \text{ și } x_1 = 8 \log_3^3 2, y_1 = 16 \log_2^4 3 + 2; \text{ k) } x_1 = 1, y_1 = 4 \text{ și } x_2 = 4, y_2 = 7; \text{ l) Trebuie ca } x > 0, y > 0. \text{ Avem } x_1 = y_1 =$$

$$= 1 \text{ și } x_2 = \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{n}{n-m}}, y_2 = \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{m}{n-m}}; \text{ m) } x = 2, y = 3, z = 4. \text{ 56. } x = 1, y = -1$$

$$\text{57. a) } \log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{y} \Rightarrow \text{sistemul}$$

$$\text{devine: } x = 8\sqrt{y}, x^2 + 16y^2 = 17. \text{ Se obține } x = 4, y = \frac{1}{4}; \text{ b) }$$

$$x = 10^5 \sqrt{\frac{7^2}{10^4}}, y = 5 \sqrt{\frac{7}{10^2}}; \text{ c) } x = y = 3; \text{ d) nu are soluții; e) } x_1 = y_1 = 2 \text{ și}$$

$$x_2 = 8, y_2 = \frac{1}{8}; \text{ f) } x = 2, y = 6; \text{ g) Trebuie ca } x > 0, y > 0, y \neq 1.$$

Logaritmăm în baza c prima ecuație, iar a doua o scriem sub forma

$\log_c \frac{x}{y} = \frac{\log_c x}{\log_c y}$. Dacă $a \neq b$ ($a, b > 0$), atunci $x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$, $y = c^{\frac{b}{b-a}}$. Dacă

$a = b$, sistemul nu are soluții; h) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei

ecuații; i) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{5}$; j) Ecuația a doua devine $x^x = y^{x+2y}$. Se deduce

$x = 4$, $y = 2$; k) Trebuie ca $m, n > 0$, $m, n \neq 1$. Dacă $m \neq n$, atunci rezultă

$$\log_m x = \frac{a - b \log_n m}{1 - (\log_n m)^2}, \log_m y = \frac{b - a \log_n m}{1 - (\log_n m)^2}. \text{ Dacă } m = n \text{ și } a \neq b, \text{ ecu-}$$

ția nu are soluție. Dacă $m = n$, $a = b$, sistemul se reduce la ecuația

$\log_m(xy) = a$; l) Notăm $\log_x y = u$, $\log_x 3 = v$ și se obține ecuația în u :

$7u^3 - 67u^2 + 118u - 24 = 0$ care are o rădăcină $u = 2$; m) Prima ecuație a

sistemului este $\log_a(x^{\log_a x} y^{\log_a y}) = 2m$, adică $x^{\log_a x} y^{\log_a y} = a^{2m}$. Se notează

$$u = x^{\log_a x}, v = y^{\log_a y} \text{ și sistemul devine } uv = a^{2m}, u + v = 2 \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} a^m;$$

n) Adunăm ecuațiile și obținem $(xy)^{\lg x} + (xz)^{\lg y} + (yz)^{\lg x} = \frac{a+b+c}{2}$. Scă-

dem din aceasta fiecare din ecuațiile sistemului dat și obținem sistemul

$$(yz)^{\lg x} = \frac{-a+b+c}{2}, (xz)^{\lg y} = \frac{a-b+c}{2}, (xy)^{\lg z} = \frac{a+b-c}{2}. \text{ Logaritmăm}$$

fiecare ecuație a sistemului și notând $u = \lg x$, $v = \lg y$, $w = \lg z$, obținem

un sistem în u, v, w care se rezolvă ușor. 59. a) $x \in (-1 - \sqrt{2}, -2) \cup$

$$\cup (0, -1 + \sqrt{2}); \text{ b) Dacă } 0 < a < 1, \text{ atunci } x \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup (0, +\infty).$$

$$\text{Dacă } a > 1, \text{ atunci } x \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right); \text{ c) } x \in (0, 1); \text{ d) Dacă } 0 <$$

$$< a < 1, \text{ atunci } x > 3. \text{ Dacă } a > 1, \text{ atunci } x \in \left(\frac{5 + \sqrt{61}}{6}, 3\right); \text{ e) Dacă } 0 <$$

$< a < 1$, atunci $x \in (\log_2 3, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in (-\infty, \log_2 3)$; f) $x \in$

$$\in \left(-\infty, \frac{\log_3 4}{2}\right); \text{ g) } x \in [\sqrt{6} - 1, 5] \setminus \{2\}; \text{ h) } x \in \left(\frac{31}{100}, 5 + 2\sqrt{6}\right);$$

i) $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \cup \{2\}$; j) $x \in (1, \log_3 82 - 3) \cup (1, +\log_3 4, +\infty)$;

k) $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; l) $x \in (3, 5) \cup (5, +\infty)$;

m) $x \in (0, \sqrt{2}-1) \cup (1, +\infty)$; n) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup$

$\cup (3, +\infty)$. 60. a) $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (1, +\infty)$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in$

$\in (0, 1] \cup \left[\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}\right]$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left[\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}\right) \cup [1, +\infty)$. 61.

Se consideră separat cazurile: $\frac{a-1}{a+1} > 1$ și $0 < \frac{a-1}{a+1} < 1$. În primul caz

inegalitatea devine $x^2 \geq \frac{-2(a+2)}{a+1}$ și pentru ca să fie satisfăcută pentru

orice x real, trebuie ca $\frac{-2(a+2)}{a+1} \leq 0$; se obține $a \in (-\infty, -2]$. În al doilea

caz inegalitatea devine $x^2 + 3 \leq \frac{a-1}{a+1}$ și nu există nici o valoare a lui a

pentru ca ea să fie satisfăcută pentru orice x real. Deci $a \in (-\infty, -2]$. 62. $a \in$

$\in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. 63. $a = 2$. 64. Punem $z = 2^x > 0$ și problema revine la a

determina toate valorile lui m , astfel încât $mz^2 + 4(m-1)z + m-1 > 0$,

oricare ar fi $z > 0$. Se găsește $m \in [1, +\infty)$. 65. $m \in [0, +\infty)$. 66. S este

nevidă pentru $m \in [2, +\infty)$, iar S este finită pentru $m = 2$. 67. Dacă

notăm $e^a = u$, $e^b = v$, $e^c = w$ avem că u, v, w sunt distincte. Din condi-

țiile problemei, dând lui x valorile: 0, 1, 2, rezultă: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha u +$

$+\beta v + \gamma w = 0$, $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0$. Rezolvând sistemul de ecuații în $\alpha,$

β, γ , găsim $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Capitolul IX

INDUCȚIA MATEMATICĂ

1. Se demonstrează ușor prin inducție matematică. Este util de încercat să se determine formulele care dau sumele din membrul stâng. 2.

a) Observăm că $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Se demonstrează, apoi, prin inducție matematică că

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, (\forall) n \geq 1; \text{ b) Observăm } \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) =$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k. \text{ Dacă se folosește problema 1, se va găsi că}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \text{ Se demonstrează apoi prin}$$

inducție matematică că formula găsită este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

3. Se demonstrează prin inducție matematică. 4. a) Folosind formula

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \text{ rezultă } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \text{ b) Din formula:}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right], \text{ se obține}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right]. \text{ 5. a) Folosind}$$

$$\text{formula } \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} =$$

$$= \frac{n}{2n+1}; \text{ b) Din formula } \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right]$$

$$\text{rezultă } \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}; \text{ c) Din formula } \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \text{ se obține } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3n+1}; \text{ d) Se obține}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4n+1}; \text{ e) Se obține } \sum_{i=k}^n \frac{1}{(i+n-1)(i+n)} =$$

$$= \frac{n}{k(n+k)}. \quad 7. \text{ a) } \text{Avem } \sum_{k=1}^n k!k = \sum_{k=1}^n k!(k+1-1) = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!]. \text{ Se ob-}$$

$$\text{ține } \sum_{k=1}^n k!k = (n+1)! - 1; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^n [(k+1)!(k+1) - k!k] =$$

$$= (n+1)!(n+1) - 1; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!};$$

$$\text{e) } \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k^2 - 2k + 1} - \frac{1}{2k^2 + 2k + 1} \right) = \frac{2n(n+1)}{2n^2 + 2n + 1};$$

$$\text{f) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n+1}}. \quad 11. \text{ Condiția}$$

de existență a logaritmului ne dă $x > -4$. Inegalitatea este echivalentă cu $2^{3x+1} < (x+4)^2$, care este evident satisfăcută pentru x egal cu: -3, -2, -1,

0, 1. Se demonstrează prin inducție matematică că pentru oricare $x \geq 2$, întreg, avem $2^{3x+1} > (x+4)^2$. Deci $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x+1 < 2\log_2(x+4)\} =$

$= \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. 12. Pentru orice $n = 0, 1$, inegalitatea nu este îndeplinită. Pentru $n = 5, 6$ inegalitatea este îndeplinită. Se demonstrează prin

inducție matematică că inegalitatea este îndeplinită pentru orice $n \geq 5$.

Deci $\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n > n^2\} = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$. 16. Pentru $n = 1$,

avem $a + b \geq a + b$, adevărată. Să presupunem că inegalitatea este ade-

vărată pentru $n = k$ și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. În-

tr-adevăr, $2^{k-1}(a^k + b^k) \geq (a+b)^k$ ne dă $2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \geq (a+b)^{k+1}$.

$$\text{Dar } 2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geq 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} \geq a^k b + ab^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^k - b^k)(a - b) \geq 0. \text{ Ultima inegalitate fiind evident adevărată, rezul-}$$

$$\text{tă } 2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geq 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b), \text{ deci } 2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geq (a+b)^{k+1}.$$

Demonstrația este terminată pe baza inducției matematice. 17. a) De-

monstrația se face prin inducție matematică după k ; b) Dacă $k \leq n$,

$$\text{atunci: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k+1}{n} +$$

$$+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3}<1+\frac{k+1}{n}+\\+\frac{(k+1)^2}{n^2}, \text{ deoarece } n(k+1)>k^2 \text{ pentru } n \geq k. \text{ Punem mai înainte } k=n$$

și obținem $2=1+\frac{n}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2}=3$. **18.** Pentru $n=6$ se veri-

fică că inegalitățile sunt îndeplinite. Să considerăm: $\left(\frac{k}{2}\right)^k > k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$ și

să demonstrăm că $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > (k+1)! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$. Pentru a demonstra

ultimele inegalități este suficient să verificăm că: $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{2}\right)^k \geq$

$$\geq k+1 \geq \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{3}\right)^k, \text{ care se reduce la } \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geq 1 \geq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,$$

care rezultă din problema precedentă. **19.** Pentru $n=2$, se va obține

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0. \text{ Presupunem că inegalitatea este a-}$$

devărată pentru $n=k$. Se demonstrează mai întâi că inegalitatea este adevărată pentru $n=2k$. Din cele de mai sus rezultă că inegalitatea este adevărată pentru un număr natural $n=2^s$, $s \in \mathbb{N}$. Se arată, apoi, că dacă inegalitatea este adevărată pentru $n=k$, atunci este adevărată pentru $n=k-1$. Fie a_1, a_2, \dots, a_{k-1} numere pozitive și λ un număr pozitiv, deo-

camdată nedefinit. Atunci $\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \lambda}{k}$. Alegem λ

încât $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$, deci $\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$.

Avem inegalitatea $\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})}{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$, sau

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}. \text{ Fie acum un număr oarecare } m, \text{ natu-}$$

ral. Dacă $m=2^s$, $s \in \mathbb{N}$, rezultă de mai înainte că inegalitatea este ade-

vărată pentru m . Dacă $m \neq 2^t$, oricare ar fi $t \in \mathbb{N}$, atunci fie s , astfel încât $m < 2^s$. Pe baza celor de mai înainte, inegalitatea este adevărată pentru $n = m$. **21.** Demonstrația rezultă ușor prin inducție matematică. **22.** Suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ se divide cu 9. Să presupunem că suma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ se divide cu 9. Atunci suma $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$ se divide evident cu 9, ca fiind suma a doi termeni, fiecare dintre aceștia fiind divizibil cu 9. **23.** $n^5 - n = (n-1) \cdot n(n+1)(n^2+1)$ este divizibil cu 2 și cu 3, deci cu 6. Să demonstrăm că $n^5 - n$ se divide cu 5. Fie $d_n = n^5 - n$ și să considerăm propoziția „ d_n se divide cu 5”. Evident, $d_0 = 0$ se divide cu 5. Presupunem că d_k se divide cu 5 și să demonstrăm că d_{k+1} se divide cu 5. Într-adevăr $d_{k+1} = (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = d_k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Se observă că d_{k+1} se divide cu 5.

24. a) Fie propoziția $P(n)$: „ $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133”. Evident, $P(0)$ este adevărată, deoarece $11^2 + 12 = 133$. Să presupunem că $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ se divide cu 133, adică $P(k)$ este adevărată și să demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată. Într-adevăr, avem $11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 12^2 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) - (12^2 - 11) \cdot 11^{k+2}$. Observăm că acesta se divide cu 133, ca fiind diferența a două numere, fiecare dintre ele fiind divizibil cu 133; b), c), d) se demonstrează analog. **27. b)** Dacă $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$, atunci $2(k+1)^3 > (k+1)^2 + 3(k+1) + 1$, deoarece această inegalitate se obține din prima prin adunarea membru cu membru a ei și a inegalității evidente $6k^2 + 6k + 2 > 6k + 6$. **28.** Din $3^k > k^3$, rezultă $3^{k+1} > 3k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$. De aici, rezultă

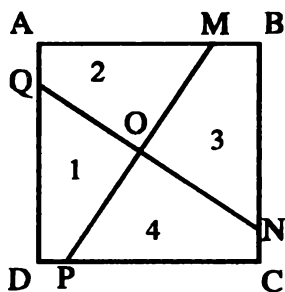
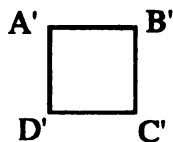
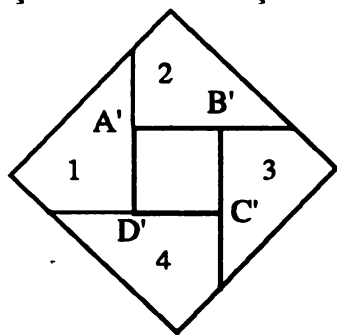
că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, $n \geq 4$. **29.** Pentru $n = 0$, inegalitatea este îndeplinită. Fie $|\sin nx| \leq n|\sin x|$. Atunci: $|\sin(n+1)x| = |\sin nx \cos x + \sin x \cos nx| \leq |\sin nx| |\cos x| + |\sin x| |\cos nx| \leq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|$. Deci $|\sin(n+1)x| \leq (n+1)|\sin x|$. Demonstrația este terminată pe baza inducției matematice. **30.** Trebuie să demonstrăm că orice număr natural mai mare decât 8, se poate descompune în suma a două numere, dintre care un multiplu de 3 și un multiplu de 5. Demonstrăm prin inducție matematică. Pentru $k = 8$ afirmația este adevărată, deoarece $8 = 3 + 5$. Fie afirmația adevărată pentru un număr n , adică $n = 3s + 5t$, $s, t \in \mathbb{N}$. Sunt

posibile două cazuri: în primul caz $t = 0$; 2) $t \geq 1$. În primul caz, când $t = 0$, trebuie ca $s \geq 3$. Atunci $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s - 3) + 5(t + 2)$. În cazul al doilea $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s + 2) + 5(t - 1)$. Deci afirmația este adevărată pentru $n + 1$. **32.** Pentru $n = 1$ afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru k și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Alegem unul din plane, să zicem al $(k + 1)$ -lea. Atunci conform problemei precedente planul ales este împărțit de dreptele de intersecție ale celorlalte k plane cu acesta, în $2k$ părți. Conform ipotezei inductive, cele k plane rămase împart spațiul în $k(k - 1) + 2$ părți. Fiecare parte a planului ales (al $k + 1$ -lea) împarte una din părțile spațiului, date de cele k plane în două părți. Deci se obțin $k(k - 1) + 2 + 2k = (k + 1)k + 2$ părți. **33.** Demonstrăm prin inducție matematică după n . Pentru $n = 1$, afirmația este adevărată, deoarece $1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$, iar o dreaptă împar-

te planul în două părți. Fie adevărată afirmația pentru $n = k$ și să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem una din cele $k + 1$ drepte pe care o vom numi a $(k + 1)$ -a. Din ipoteza inductivă cele k drepte rămase împart planul în $1 + \frac{k(k + 1)}{2}$ părți, a $(k + 1)$ -a dreaptă taie primele k drepte în k puncte și de aceea este împărțită de aceste puncte în $k + 1$ părți. Deoarece cele k puncte obținute sunt diferite de punctele de intersecție ale primelor k drepte (între ele), atunci fiecare din aceste părți împart una din părțile planului în două părți (date de cele k drepte), adică la $1 + \frac{k(k + 1)}{2}$

părți se adaugă încă $k + 1 \Rightarrow$ avem $1 + \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = 1 + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$ părți. **34.** Se demonstrează prin inducție matematică după n , folosind problema precedentă (la trecerea de la pasul k la pasul $k + 1$), analog raționamentului din problema 33. **35.** Demonstrăm prin inducție matematică după n . Pentru $n = 1$, afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru $n = k$ și să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem unul din cercuri și atunci, mai întâi, el se intersectează cu fiecare din celelalte k cercuri în cel mult 2 puncte, și în al doilea rând cele k cercuri rămase împart planul în cel mult $k^2 - k + 2$ părți (conform ipotezei de inducție). Punctele obținute (în număr de cel mult $2k$) de intersecție ale cercului ales cu celelalte cercuri îl împart în cel mult $2k$ părți și fiecare dintre aceste arce împart una din părțile avute ale planului în două. Se obțin cel mult $(k^2 - k + 2) + 2k = (k + 1)^2 - (k + 1) + 2$ părți. Dacă cercurile sunt două câte două secante, atunci avem egalitate.

36. Pentru $n = 1$ afirmația nu necesită demonstrație. Să demonstrăm că și pentru $n = 2$ este de asemenea valabilă. Să notăm laturile pătratelor date $ABCD$ și $A'B'C'D'$ cu a și b .



Să presupunem $a \geq b$ și fie punctele M, N, P, Q pe laturile pătratului $ABCD$, astfel încât $AM = BN = CP = DQ = \frac{a+b}{2}$ și tăiem pătratul după

dreptele MP și NQ , obținând patru părți egale. Aceste părți se pot aplica pe laturile celui de al doilea pătrat ca în figură, obținându-se un nou pătrat. Să presupunem afirmația adevărată pentru n pătrate și să considerăm acum $n + 1$ pătrate. Alegem două oarecare P_1 și P_2 și procedând ca la pasul $n = 2$ obținem din acestea un nou pătrat P' . Astfel am redus numărul pătratelor la n și aplicăm ipoteza de inducție pentru pasul n . **37.**

Vom face inducție după numărul l al frontierelor hărții. Fie $l = 0$, atunci $s = l, p = 1$ și clar $s + p = l + 2$. Să presupunem că teorema este adevărată pentru orice hartă care are n frontiere și să considerăm o hartă ce conține $l + 1$ frontiere, s țări și p vârfuri. Sunt posibile două cazuri: 1) Pentru orice pereche de vârfuri ale hărții există un drum unic care le unește de-a lungul frontierelor hărții. În acest caz harta nu are nici un contur închis. Avem $s = 1$. Se arată că pe o astfel de hartă se va găsi cel puțin un vârf aparținând numai unei singure frontiere. Îndepărtând acest vârf cu unica frontieră care îl are drept capăt, obținem o nouă hartă în care $l' = l - 1 = n, s' = s - 1, p' = p - 1$. În virtutea ipotezei inductive $s' + p' = l' + 2 \Rightarrow s + p = l + 2$. 2) Există două vârfuri unite prin mai multe drumuri. În acest caz pe hartă există un contur închis care trece prin aceste vârfuri. Îndepărtând una dintre frontierele acestui contur (fără vârfuri), obținem o nouă hartă, în care $l' = l - 1 = n, p' = p, s' = s - 1$. Prin ipoteza inductivă $s' + p' = l' + 2 \Rightarrow s + p = l + 2$. **38.** Să așezăm poliedrul în interiorul unei sfere de rază suficient de mare și să proiectăm din centrul sferei, care-l putem considera în interiorul poliedrului toate punctele poliedrului pe sferă. Harta obținută pe sferă o proiectăm dintr-un punct arbitrar al ei, care nu aparține nici unei frontiere, pe planul tangent sferei

în punctul diametral opus. Hărții plane obținute îi aplicăm teorema lui Euler (problema precedentă). 39. Pentru $n = 1$, afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru k și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Fie pentru aceasta $k + 1$ sfere. Deoarece k sfere intersectează sfera $(k + 1)$ -a după k cercuri și prin urmare împart suprafața ei în $k^2 - k + 2$ părți (vezi problema 38) rezultă că dacă k sfere, două câte două secante, împart spațiul în N_k părți, atunci $k + 1$ sfere împart spa-

țiul în $N_{k+1} = N_k + (k^2 - k + 2)$ părți. Rezultă că $N_{k+1} = \frac{k(k^2 - 3k + 8)}{3} + (k^2 - k + 2) = \frac{(k+1)(k+1)^2 - 3(k+1) + 8}{3}$. Conform inducției matematice afirmația este adevărată pentru orice $n \geq 1$, număr natural.

Capitolul X ELEMENTE DE COMBINATORICĂ BINOMUL LUI NEWTON

1. a) $n = 5$; b) $n = 3$; c) $n = 6$. 2. a) $n \geq 12$ ($n \in \mathbb{N}$); b) $5 \leq n \leq 11$ ($n \in \mathbb{N}$). 3. a) $5 \leq n \leq 20$ ($n \in \mathbb{N}$); b) $n \in \{2, 3\}$. 4. $5! = 120$. 5. a) $5! : 2 = 60$ moduri; b) $4! = 24$ moduri. 6. a) $6! - 5! = 600$; b) $5! = 120$; c) $5! - 4! = 96$; d) $4! = 24$; e) $600 - 24 = 576$. 7. a) 5^4 ; b) $5! - 4! = 96$. 8. $\frac{7!}{14} = 360$. 9.

Fie (i, j) , $i = 1, 2, \dots, 8$; $j = 1, 2, \dots, 8$, careul care se găsește la intersecția liniei orizontale i cu linia verticală j (pe tabla de șah). Două turnuri care se găsesc în căreurile (i, j) și (k, l) nu se pot lua unul pe celălalt, atunci și numai atunci când $i \neq k$ și $j \neq l$. Se găsesc $8! = 40320$ așezări posibile diferite ale celor 8 turnuri. 10. Se găsește mai întâi că există $k!(n - k + 1)!$ permutări, în care numerele a_1, a_2, \dots, a_k ocupă k locuri la rând și deci numărul cerut în problemă este $n! - k!(n - k + 1)!$.

$$11. \left(\left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{6} \right] \right)! \left(\left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{6} \right] \right)! \left(n - \left(\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] - \left[\frac{n}{6} \right] \right) \right)! \left[\frac{n}{6} \right]!$$

$$12. a) \frac{n^2 - 11n + 31}{n - 5}; b) 0; c) 1; d) n + 3; e) \frac{n^2 - n - 2k - 2}{k + 1}; f) 4k^2; g)$$

$\frac{(n-1)!}{(k-1)!} = A_{n-1}^{n-k}$; h) $\frac{n!}{(k-1)!} = A_n^{n-k+1}$. **13.** a) $n = 7$; b) $n = 5$; c) $n = 8 - m$, $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; d) $n = 12$; e) $n = 9$; **14.** $A_5^3 = 60$ moduri. **15.** $A_6^2 = 30$ dicționare. **16.** $A_9^5 = 15120$; $4A_8^4 = 8400$. **17.** Numere cu cinci cifre sunt: $A_5^5 - A_4^4 = 96$. Numere cu patru cifre sunt: $A_5^4 - A_4^3 = 96$. Numere cu trei cifre sunt: $A_5^3 - A_4^2 = 48$, cu două cifre sunt: $A_5^2 - A_4^1 = 16$, iar cu o cifră sunt 5. În total sunt 261 numere. **18.** Numărul liniilor poligonale neînchise este egal cu $\frac{1}{2}A_n^{k+1}$, iar al celor poligonale închise este egal cu $\frac{A_n^k}{2n}$. **19.** a) 0; b) $\frac{2(n-k)}{n-1}$. **20.** $n = 9$; $C_9^7 = 36$. **21.** a) $n \in \{3, 14\}$; b) $n = 5$; c) $n = 19$; d) $n = 4$; e) $n = 7$; f) $n = 4$; g) $n = 7$; h) $n = 5$; i) $n = 27$. **22.** a) $n > 6$ ($n \in \mathbb{N}$); b) $1 \leq k \leq 9$ ($k \in \mathbb{N}$); c) $9 \leq k \leq 15$ ($k \in \mathbb{N}$); d) $4 \leq n \leq 13$ ($n \in \mathbb{N}$). **23.** $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **24.** $9 \cdot 7 = 63$; $C_9^2 \cdot C_7^2 = 756$. **25.** $C_8^4 = 70$; $3 \cdot C_5^3 = 30$. **26.** $C_6^2 = 15$. **27.** $C_9^5 = 126$; $C_{10}^5 = 252$. **28.** $C_6^3 \cdot C_9^4 + C_6^4 \cdot C_9^3 + C_6^5 \cdot C_9^2 + C_6^6 \cdot C_9^1 = 4005$. **29.** $C_7^4 \cdot A_8^4 = 58800$. **30.** a) $x = 5k - 1$, $y = 3k$ ($k \in \mathbb{N}^*$); b) $x = 3$, $y = 8$; c) $x = 5$, $y = 5$; d) $x = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{n!}$, $y = \frac{k(k+1)(2k-n+1)}{n^2(n+1)}$. **31.** a), b) Se folosește relația $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$; c) Folosim $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. **32.** a) $\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$; b) Suma se scrie $\sum_{k=2}^n \frac{k^2(k-1)^2}{4} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n k^4 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^3 + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n k^2$. Folosim apoi problema 1 din cap. IX. **31.** a) $\frac{n(n^2-1)}{6}$; b) $\frac{n(n+1)(3n^3-3n^2-2n+2)}{60}$. **33.** Demonstrăm prin inducție după n . Notăm $S_n = 1 + N_1 + N_2 + \dots + N_{n-1}$. Dacă considerăm numerele $1, 2, \dots, n, n+1$, atunci se observă: $S_{n+1} = 1 + [N_1 + (n+1)] + [N_2 + (n+1)N_1] + \dots + [N_{n-1} + (n+1)N_{n-2}] + (n+1)N_{n-1} + n!$. **34.** a) $1 + C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 2^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1} + 2^n = (1+2)^n = 3^n$; b) Același rezultat ca la punctul a). **35.** Să notăm cu S suma cerută. Împărțind ambii

membri cu $(2n)!$ se obține $\frac{S}{(2n)!} = \frac{1}{C_{2n}^0} - \frac{1}{C_{2n}^1} - \frac{1}{C_{2n}^2} - \dots - \frac{1}{C_{2n}^{2n-1}} + \frac{1}{C_{2n}^{2n}}$. Se

arată: $\frac{1}{C_{2n}^k} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{C_{2n+1}^k} + \frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}} \right)$ relație pe care o folosim în egalita-

tea de mai înainte. **36.** Se scrie $S_k = \sum_{l=1}^k l!(1+l^2) = \sum_{l=1}^k l!(1+l^2+2l-2l) =$
 $= \sum_{l=1}^k [(l+1)!(l+1) - 2l!l]$. **38.** a) $T_8 = 960x^3a^7$; b) $T_5 = 126x^2y^2\sqrt{x}$; c)

$T_8 = -3432 \frac{1}{x^4\sqrt[3]{x^2}}$; d) $T_7 = 219648a^3b\sqrt{ab}$, $T_8 = -109824a^3b^4\sqrt[3]{b^3}$. **39.**

a) $k = 2$; b) $k = 3$; c) $k = 16$; d) $k = 10$; e) $k = 8$. **40.** $k = 15$. **41.** $n = 15$.

42. $n = 20$. **43.** $n = 6$. **44.** $n = 15$, $T_6 = 1001 \cdot 3^6$. **45.** $n = 8$, $T_5 = 70(1 -$

$-x^2)^2$. **46.** $x_1 = \frac{1}{100\sqrt{10}}$, $x^2 = 10$. **47.** $m = 12$; **48.** $n = 6$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

49. $x_1 = \frac{1}{10^4}$, $x_2 = 10$. **50.** $n = 7$, $T_5 = 35x^{\frac{2}{3}}$. **51.** $T_5 = 126a^{-1}$. **52.** a) $T_{15} =$

$= -C_{24}^{10} \cdot 36$; b) $T_1 = 3^5$; $T_3 = C_{10}^2 \cdot 3^4 \cdot 7$; $T_5 = C_{10}^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$; $T_7 = C_{10}^4 \cdot 3^2 \cdot 7^3$;

$T_9 = C_{10}^2 \cdot 3 \cdot 7^4$; $T_{11} = 7^5$. **53.** Sunt 51 de termeni și anume: T_{4k+1} , $k \in \mathbb{N}$,

$0 \leq k \leq 50$. **54.** $T_i \notin \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq 25$, $i \neq 1$ și $i \neq 15$ ($i \in \mathbb{N}$). **55.** Din dezvoltare

avem $nm - (m+p)k = 0$, $nm - 11(m+p) = 1$, $nm - 23(m+p) = 5$.

Scăzând prima ecuație din celelalte două și făcând câtul se obține

$\frac{k-11}{k-23} = \frac{1}{5}$, de unde $k = 8$. Apoi, $m+p = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{8}{3m}$ și deoarece n

este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg și pozitiv. Lăsăm continuarea

pe seama cititorului. **56.** $n + 1$. **57.** Sunt 6 termeni raționali. **58.**

$-C_7^0 C_4^3 + C_7^1 C_4^2 - C_7^2 C_4^1 + C_7^3 C_4^0 = -11$. **59.** a) Punem $x^4 = y^3 = 1$. Atunci

dezvoltând după formula binomului lui Newton și înlocuind x^4 și y^3 prin

1, obținem suma căutată a coeficienților. Astfel suma coeficienților este

egală cu $(9-8)^{19} = 1$; b) Suma coeficienților dezvoltării $(8x^2 - 6y^3)^8$ este

$(8-6)^8 = 256$. **60.** $(9-8)^n = 1$. **61.** a) Calculăm $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}$ și obținem că

$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, pentru $k \leq 32$ și $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$, pentru $k \geq 33$. Deci cel mai mare

este T_{34} ; c) $k = 10$. **62.** Se studiază cazurile: n par și n impar. **63.** Trebuie să găsim un l , astfel încât suma primilor l termeni ai dezvoltării $(1 + 10^{-2})^{10}$ să difere de numărul $(1 + 10^{-2})^{10}$ cu mai puțin de 10^{-3} . Pentru aceasta este suficient ca suma termenilor dezvoltării, începând cu cel de rang $l + 1$, să fie mai mică decât 10^{-3} . Se rezolvă inegalitatea $\sum_{k \geq l} T_{k+1} < 10^{-3}$, adică:

$$\sum_{k \geq l} C_{10}^k (10^{-2})^k < 10^{-3} \text{ dar } \sum_{k \geq l} C_{10}^k < 1000 \Rightarrow \sum_{k \geq l} C_{10}^k (10^{-2})^k < 10^3 \cdot 10^{-6} < 10^{-3}$$

pentru $l \geq 2$. Se observă că numai doi termeni ai dezvoltării nu sunt de ajuns, așadar trebuie să luăm neapărat primii trei termeni ai dezvoltării.

64. Se consideră egalitatea $(1 - \sqrt{3}i)^{6n} = \left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \right]^{6n} = 2^{6n}$.

Dezvoltăm membrul stâng după formula binomului lui Newton și partea reală a dezvoltării care este tocmai $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k} (-3)^k$ este egală cu 2^{6n} . **65.** Se

consideră: $(1 + i)^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$. Se

dezvoltă $(1 + i)^n$ după formula binomului lui Newton și se egalează părțile reale și imaginare ale celor doi membri. **66.** Se consideră egalitatea

$$\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n = \frac{\cos 2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}$$

67. Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $\left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n$.

68. Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui

$$(1 + i)^n \cdot \text{69. Avem } (1 + x)^n + (1 - x)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} C_n^{2k} x^{2k}.$$

Coeficienții din dezvoltare sunt pozitivi. Cea mai mare valoare se poate obține pentru $x = 1$, când avem 2^n . **70. a)** Fie $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$. Din $C_n^k = C_n^{n-k}$

se obține $S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \dots + C_n^{n-1}$. Adunând cele două egalități, avem $2 \cdot S_n = n(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) = 2^n \cdot n$, de unde $S_n = 2^{n-1} n$; b) Se proce-

dează ca la punctul a) și obținem $S_n = 2^{n-1}(n+2)$; c) $S_n = (n-2)2^{n-1} + 1$;

d) $S_n = (n+1)2^n$; e) $S_n = 0$; f) Avem $S_n = 4(C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) = 2^{n-1}n - 2^n + 1$; g) Folosim formula $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, deci $S_n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 - 2(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + 3(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) - \dots + (-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1} = C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \dots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}$. Dacă $n = 1$, $S_1 = 0$ și dacă $n \geq 1$, $S_n = 0$; h)

$$S_n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}; \quad \text{i)} \quad C_n^k = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2},$$

obținem $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \dots + (n+1)C_{n+2}^{n+2}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot (C_{n+2}^1 + 2C_{n+2}^2 + \dots + (n+2)C_{n+2}^{n+2}) - (C_{n+2}^1 + \dots + C_{n+2}^{n+2})$. Conform punctelor a)

și b) se obține: $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1] = \frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}$;

j) Suma devine $S_n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^2 + \dots + (-1)^nC_{n+1}^{n+1})$. Dar suma dintre

paranteze este egală cu 1 și deci $S_n = \frac{1}{n+1}$. 71. a) Suma este egală cu

coeficientul lui x^n din expresia $x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n$, care este egală cu $x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x)^n$. Se obține că suma căutată este egală cu $(-1)^m C_{n-1}^m$, pentru $m \leq n-1$ și este egală cu 0, pentru $m = n$;

b) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^k din expresia: $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \dots + (1+x)^{n+m}$, care este egală cu $\frac{1}{x}[(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n]$.

Rezultă că suma este egală cu $C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$, pentru $k \leq n-1$ și este egală cu C_{n+m+1}^{n+1} , pentru $k = n$. c) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ rădăcinile ecuației:

$x_k - 1 = 0$, adică $\varepsilon_l = \cos \frac{2l\pi}{k} + i \sin \frac{2l\pi}{k}$, $l = 1, \dots, k$. Avem că $\varepsilon_1^s + \varepsilon_2^s + \dots + \varepsilon_k^s$ este egală cu k , dacă $k \mid s$ și este 0, dacă k nu divide s . Deci

$$\sum_{l=1}^k (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{s=0}^n C_n^s \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon_l^s \right) = k \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{k} \right]} C_n^k, \text{ cum } 1 + \varepsilon_l = 2 \cos \frac{l\pi}{k} \left(\cos \frac{l\pi}{k} + i \sin \frac{l\pi}{k} \right)$$

atunci $\sum_{l=1}^k (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{l=1}^k 2^n \cos^n \frac{l\pi}{k} \left(\cos \frac{nl\pi}{k} + i \sin \frac{nl\pi}{k} \right)$. Rezultă că suma

căutată este egală cu $\frac{2^n}{k} \sum_{l=1}^k \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{nl\pi}{k}$; d) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ ca la

punctul b) și considerăm suma $\sum_{l=1}^k \varepsilon_l^{-1} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{l=0}^n C_n^l (\varepsilon_1^{l-m} + \dots + \varepsilon_k^{l-m})$. Se

folosește faptul că $\varepsilon_1^{l-m} + \dots + \varepsilon_k^{l-m}$ este egală cu k , dacă $k \mid (l - m)$ și este egală cu 0, dacă k nu divide $(l - m)$. Se obține că suma căutată este egală

cu $\frac{2^n}{k} \sum_{l=1}^k \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{(n-2m)l\pi}{k}$, pentru $k > 1$. 72. a) Egalăm coeficienții

lui x^n din cei doi membri ai egalității $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Se obține că suma căutată este C_{2n}^n ; b) Se calculează coeficientul lui x^n din

ambele părți ale egalității $(1-x)^n (1+x)^n = (1-x^2)^n$. Se obține că suma este 0, pentru n impar, iar pentru $n = 2k$, număr par, suma este $(-1)^k C_{2k}^k$;

c) Se poate folosi formula $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Se obține că suma căutată este 1, pentru $n = 3k$; 0, pentru $n = 3k + 1$; -1, pentru $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}$;

d) Suma căutată este egală cu 2^{2n} ; e) Suma este egală cu $\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$.

Capitolul XI

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE

1. a) 3, 8, 13, 18, 23; b) -2, 1, 6, 13, 22; c) -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{-1}{120}$; d) 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{-8}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{-24}{5}$; e) $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{10}{16}$; f) 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{10}$; g) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. 2. a) $-(1)^{n+1} \frac{1}{n}$; b) 0, $\frac{1}{100}$, $\frac{101}{10000} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10000}$,

deci $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{10^2}$, $a_3 = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4}$. În general $a_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{2k}}$; c) $\frac{2n \cdot 2(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$; d) $\frac{2 \cdot 3^{n-1}}{5^n}$; e) $\frac{4n-1}{6n-1}$. 3. a) Din

$3n^2 - 2 = 190$, rezultă $3n^2 = 192$, de unde $n = 8$. Deci $a_8 = 190$; b)

Obținem $a_9 = 241$; c) nu este; d) Obținem că $a_{73} = 15985$. 4. $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2\alpha$, $a_3 = 3\alpha$, $a_4 = 4\alpha$, $a_5 = 5\alpha$; b) $a_1 = \beta$, $a_2 = 2\beta$, $a_3 = 4\beta$, $a_4 = 8\beta$, $a_5 = 16\beta$; c) $a_1 = \gamma$, $a_2 = 1$, $a_3 = \gamma$, $a_4 = 1$, $a_5 = \gamma$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = \alpha^2 - \beta^2$, $a_4 = \alpha\beta - \beta\alpha^2 + \beta^3$, $a_5 = \alpha^3 - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = 2\alpha\beta$, $a_4 = \beta^2 + 2\alpha^2\beta$, $a_5 = 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3\beta$. 5. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 1$, $a_3 = 2^3 + 1$. Se demonstrează prin inducție matematică că $a_n = 2^n + 1$. 6.

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$. În general, $a_n = n^2$. Demonstrația se face prin inducție matematică. 7. $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{1}{4}$. În general, $b_n = \frac{1}{n}$. Demonstrația se face prin inducție matematică. 8. a) x_1 , x_2 , x_3 ; b) x_1 , x_2 , x_3 , x_4 . 9. Demonstrația se face prin inducție matematică. 10. $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{5}{6}$. În general, $x_n = \frac{n+1}{n+2}$. Demonstrația se face prin inducție matematică. 11. $c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$, $c_3 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$ și se arată prin inducție că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

12. $a_2 = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}$, $a_3 = \frac{(\alpha^4 - \beta^4) - (\alpha^3 - \beta^3)}{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}$. Formula pentru a_n se demonstrează prin inducție matematică. 13. a) Dacă $n = 2k$, atunci $S_{2k} = [0 + 1 + 2 + \dots + (k-1)] + (1 + 2 + 3 + \dots + k) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k^2$. Dacă $n = 2k + 1$, atunci $S_{2k+1} = (0 + 1 + 2 + \dots + k) + (1 + 2 + \dots + k) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k(k+1)$. Demonstrația se face prin inducție matematică; b) Se poate considera separat fiecare din cazurile; I) p par, q par;

II) p par, q impar; III) p impar, q par; IV) p impar, q impar. 14. a) 2, -1, -4, -7, -10, $a_n = 2 + (-3)(n-1)$; b) $a_1 = 23, a_2 = 35, a_3 = 47, a_4 = 59, a_5 = 71, a_n = 23 + 12(n-1)$; c) $a_1 = 21, a_2 = 22\frac{1}{2}, a_3 = 24, a_4 = 25\frac{1}{2}, a_5 = 27, a_n = 21 + \frac{3}{2}(n-1)$; d) $a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_n = 3 + 4(n-1)$. 15. Avem $a_4 - a_2 = 2r = 6$, de unde $r = 3$. Obținem $a_1 = -10, a_3 = -4, a_5 = 2, a_6 = 5$. 16. $a_1 = -13\alpha$. 17. $n = 8$. 18. a) $a_1 = -5, r = 2$; b) $a_1 = 4, r' = 1$ și $a_1'' = 6, r'' = -1$; c) $a_1 = 2, r = 2$. 19. a) $S_{100} = 15050$; b) $S_{100} = 33350$. 20. Se demonstrează că $y_k = \frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{2}$. Se obține $y_1 = \alpha + \beta$, și $r = \alpha$. 21. Avem $S_1 = \alpha + \beta + \gamma = a_1, S_2 = 4\alpha + 2\beta + \gamma = a_1 + a_2, S_3 = 9\alpha^2 + 3\beta + \gamma = a_1 + a_2 + a_3$. Pentru ca $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, trebuie ca $\gamma = 0$. În acest caz (când $\gamma = 0$), șirul (a_n) este o progresie aritmetică. Avem $a_n = (2n-1)\alpha + \beta$. 22. $r = \frac{\alpha}{2}, a_n = \alpha(2n-1)$. 24. Se verifică dacă este adevărată relația $b_k = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}$; a) este progresie; b) este progresie; c) este progresie; d) nu este progresie; e) nu este progresie; 25. Se observă că $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$. 26. $a_1 = a - r, a_2 = a, a_3 = a + r$. Se aplică teorema lui Pitagora și se obține $a = 4r$. Dacă $a_1 = 3r, a_2 = 4r, a_3 = 5r$, atunci $\frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{4} = \frac{a_3}{5}$. 27. a) $S_{2k} = -k$, iar $S_{2k+1} = k+1$; b) $S_{2k} = -2k$, iar $S_{2k+1} = 2k+1$. 28. Fie a_1, a_2, a_3, \dots șirul din enunț. Atunci $a_2 - a_1 = \gamma_1, a_3 - a_2 = \gamma_2, \dots, a_n - a_{n-1} = \gamma_{n-1}$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ este o progresie aritmetică. Adunând relațiile membru cu membru $\Rightarrow a_n = a_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}$. Cum $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = 4, \dots$ se obține $a_n = 1 + \frac{n^2 + n + 2}{2}$. 29. Din egalitatea $a \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}} + d \cdot \sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}} = b \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}} + c \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}$ se deduce că $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$. 31. Avem $T_{k+1} = C_m^k a^{m-k} b^k$ și pentru $k = 5, T_6 = 21$. Mai mult,

cum C_m^1, C_m^2, C_m^3 sunt în progresie aritmetică, rezultă $m = 7$. Se obține

ecuația $C_7^5 \cdot 2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 21$, adică $2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 1$ de unde $x_1 =$

$= 2, x_2 = 1$. **32.** Ecuația din enunț are exact patru rădăcini \Leftrightarrow ecuația $y^2 +$
 $+ ay + a^4 = 0$ are două rădăcini pozitive y_1, y_2 cu $y_1 \neq y_2$. Dacă $y_1 < y_2$

atunci ecuația are rădăcinile $-\sqrt[4]{y_2}, -\sqrt[4]{y_1}, \sqrt[4]{y_1}, \sqrt[4]{y_2}$ scrise în ordine
 crescătoare. Faptul că acestea sunt în progresie aritmetică înseamnă că

$-\sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_2}) = \sqrt[4]{y_1} - (\sqrt[4]{y_1}) = \sqrt[4]{y_2} - \sqrt[4]{y_1}$ sau $\sqrt[4]{y_2} = 3\sqrt[4]{y_1}$, adică $y_2 =$

$= 81y_1$. Folosind relațiile lui Viete, se obține că $a = -\frac{9}{82}$ îndeplinește

condițiile problemei. **33.** a) $b_1' = 3, b_2 = -6, b_3 = 12, b_4 = -24, b_5 = 48$; b)

$b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 12, b_4 = 24, b_5 = 48$; c) $b_1' = \frac{5^7}{3^5}, b_2' = \frac{5^6}{3^4}, b_3' = \frac{5^5}{3^3},$

$b_4' = \frac{5^4}{3^2}, b_5' = \frac{5^3}{3}$; $b_1'' = -\frac{5^7}{3^5}, b_2'' = \frac{5^6}{3^4}, b_3'' = -\frac{5^5}{3^3}, b_4'' = \frac{5^4}{3^2}, b_5'' = -\frac{5^3}{3}$ d)

$b_1 = 5, b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 40, b_5 = 80$. **34.** $b_2 = 2\sqrt{3}, b_3 = 6\sqrt{2},$

$b_5 = 36\sqrt{2}, b_6 = 72\sqrt{3}$. **35.** a) 1, 2, 4, 8, 16 și -16, -8, -4, -2, -1; b) 625,

-375, 225, -135, 81. **36.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **37.** a) Da; b) Da; c) dacă

$\beta \neq 0$, nu; d) Da; e) Da. **40.** Din relația dată se obține $y^2 = xz$. **41.** Scriem

suma (notată cu S) astfel:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98} + 2^{99} +$$

$$+ 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98} + 2^{99} +$$

$$+ 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98} + 2^{99} +$$

.....

$$+ 2^{98} + 2^{99} +$$

$$+ 2^{99}. \text{ Deci}$$

$$S = \frac{1(2^{100} - 1)}{2 - 1} + \frac{2(2^{99} - 1)}{2 - 1} + \frac{2^2(2^{98} - 1)}{2 - 1} + \dots + \frac{2^{98}(2^2 - 1)}{2 - 1} + \frac{2^{99}(2 - 1)}{2 - 1} =$$

$$= (2^{100} - 1) + (2^{100} - 2) + (2^{100} - 2^2) + \dots + (2^{100} - 2^{99}) = 100 \cdot 2^{100} -$$

$$-(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}) = 99 \cdot 2^{100} + 1. \text{ **42.** Se folosește formula } 1 + x + x^2 +$$

$$+ \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}, \text{ pentru } x \neq 1. \text{ **44.** Avem } 3 = \frac{10 - 1}{3}, 33 = \frac{10^2 - 1}{3},$$

..., $\underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ ori}} = \frac{10^n - 1}{3}$. Obținem: $S_n = \frac{10(10^n - 1)}{27} - \frac{n}{3}$. **45.** Dacă r este rația

progresiei aritmetice, iar q a celei geometrice, se arată că $r \geq 0$, $q \geq 1$.

Pentru a demonstra că $a_n \leq b_n$ observăm $a_1 q^{n-1} - a_1 - (n-1)r = a_1(q-1) \cdot$

$\left[q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q + 1 - (n-1) \right]$, iar numărul din paranteza mare este po-

zitiv. Egalitatea tuturor termenilor celor două progresii are loc numai în

cazul în care $q = 1$ (și deci $r = 0$). **47.** $3^{\frac{12}{5}}$, $3^{\frac{7}{5}}$, $3^{\frac{2}{5}}$, $3^{\frac{-3}{5}}$, $3^{\frac{-8}{5}}$. **48.** $S_1 = 1 \cdot$

$\cdot 13 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 13 + \dots + 76 \cdot 13$ este suma numerelor ≤ 1000 care se

divid cu 13. $S_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ este suma tuturor numerelor ≤ 1000 .

Suma căutată este $S_2 - S_1 = 462462$. **49.** Primul termen este 2 sau $\frac{62}{5}$.

50. $a = 100$, $b = 20$, $c = 4$. **51.** Primul termen este 70 sau 10. **53.** Dacă n

este par, atunci $a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \dots = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$. Dacă n este im-

par $\Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \dots \left(a_{\frac{n-1}{2}} a_{\frac{n+3}{2}} \right) a_{\frac{n+1}{2}} = (a_1 a_n)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{a_1 a_n} =$

$= (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$. **54.** $b = \frac{a+c}{2}$, $c^2 = ab$, $a = \frac{2bc}{b+c}$. Deducem că b și c trebuie

să verifice relația $2b^2 - bc = c^2$. **55.** Avem $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 5(a_2 + a_4 +$

$+ \dots + a_{2n})$; obținem $q = \frac{1}{4}$. **56.** Deducem $2a_1 + 9b_1 = 31$, $b_1(1 + a_1) = 9$,

de unde $a_1 = \frac{25}{2}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ și $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. **57.** Avem $a_1 + r = b_1 q$, $a_1 +$

$+ 2r = b_1 q^2 - 8$. Dar $a_1 = b_1$ și se obține $a_1 = \frac{r}{q-1}$, $a_1 = \frac{2r+8}{q^2-1}$. Deci r și

q satisfac relația $\frac{r}{q-1} = \frac{2r+8}{q^2-1}$, iar $a_1 (= b_1)$ este arbitrar. **58.** Avem $a_1 +$

$+ r = \sqrt{a_1(a_1 + 3r)}$, de unde $a_1 = r$. Așadar $a_4 = 4a_1$, $a_6 = 6a_1$, $a_9 = 9a_1$ și

evident $a_4 \cdot a_9 = a_6^2$, $q = \frac{3}{2}$. **59.** Dacă $0 < q < 1$ este rația progresiei geo-

metrice, atunci $p = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \dots \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{a_1 \cdot (a_1 q^2) \dots (a_1 q^{2n-2})}{(a_1 q)(a_1 q^3) \dots (a_1 q^{2n-1})}$. După efec-

tuarea calculelor obținem $p = \frac{1}{q^n} < \frac{1}{\frac{2n+1}{q^2}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_1 q^{2n+1}}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}$. **60.** Nu-

mărul boabelor de grâu este $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$. **62.** $2^{64} - 1$. **63.**

a) Se efectuează ridicările la pătrat și se însumează. Vom obține:

i) $\frac{(a^{2n} - 1)(a^{2n+2} - 1)}{a^{2n}(a^2 - 1)} + 2n$, ii) $\frac{(a^{2n} - 1)(a^{2n+2} - 1)}{a^{2n}(a^2 - 1)} - 2n$. **64.** a) Scriem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots \\ & + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{r} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{r} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{r} = \\ & = \frac{1}{r} (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}); \text{ b) } \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}(\sqrt{q} - 1)} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{q}}\right)} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{q}}\right)} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{q} - 1} + \underbrace{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1} + \dots + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}}_{n-1} = \frac{1 + (n-1)\sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}. \end{aligned}$$

65. $S_1 = \frac{1}{a_1^p(q^p + 1)}$.

$\left(1 + \frac{1}{q^p} + \dots + \frac{1}{q^{2p}}\right)$ și $S_2 = \frac{1}{a_1^p(q^p - 1)} \left(1 + \frac{1}{q^p} + \dots + \frac{1}{q^{2p}}\right)$ deci $\frac{S_1}{S_2} = \frac{q^p - 1}{q^p + 1}$,

q fiind rația progresiei geometrice. **66.** Avem $a_k = S_k - S_{k-1} = (2k - 1)a + b$. Este clar că șirul (a_k) este o progresie aritmetică în care $a_1 = a + b$ și ra-

ția $r = 2a$. **68.** Avem $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$. Presupunem că pentru $k < n$, avem

$a_k = \frac{1}{k!}$ și să arătăm că $a_n = \frac{1}{n!}$. Într-adevăr, $a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_k a_{n-k} + \dots + a_n a_0 = a_n + \frac{1}{1!} \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} + \dots + \frac{1}{1!} \frac{1}{(n-1)!} + a_n = 2^n a_n$. Deci

$$\frac{1}{n!} (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n) - \frac{1}{n!} + 2a_n = 2^n a_n, \text{ sau } \frac{2^n - 2}{n!} + 2a_n = 2^n a_n,$$

de unde $a_n = \frac{1}{n!}$. Folosind varianta a doua a metodei inducției matema-

tice $\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$, pentru orice n . **69. a)** Avem $a_{k+1}^p - a_k^p = (a_k + r)^p - a_k^p =$

$$= C_p^1 r a_k^{p-1} + C_p^2 r^2 a_k^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_k + C_p^p r^p, p \geq 1, \text{ fiind un număr natu-}$$

ral. Considerăm acum relațiile, pentru $k = 1, 2, \dots, n$, adică

$$a_2^p - a_1^p = C_p^1 r a_1^{p-1} + C_p^2 r^2 a_1^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_1 + C_p^p r^p$$

$$a_3^p - a_2^p = C_p^1 r a_2^{p-1} + C_p^2 r^2 a_2^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_2 + C_p^p r^p$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n+1}^p - a_n^p = C_p^1 r a_n^{p-1} + C_p^2 r^2 a_n^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} a_n + C_p^p r^p.$$

Adunând aceste relații, membru cu membru, obținem relația cerută. **b)**

Pentru $p = 1$, relațiile ne dau $a_2 - a_1 = r, a_3 - a_2 = r, \dots, a_n - a_{n-1} = r$, ceea ce ne arată că a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie aritmetică cu rația r . **70. a)**

Avem $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Se verifică ușor că pentru orice $k, 2 \leq k \leq n-1$, avem

$(b_{k-1} - q)(b_{k+1} - q) = (b_k - q)^2$, deci $b_1 - q, b_2 - q, \dots, b_n - q$ sunt în progresie geometrică. Rația acestei progresii este egală cu α . Avem $b_n - q =$

$$= (b_1 - q)\alpha^{n-1}, \text{ de unde } b_n = (b_1 - q)\alpha^{n-1} + q, \text{ unde } q = \frac{\beta}{1-\alpha}; \text{ b) } b_1 + b_2 +$$

$+ \dots + b_n = (b_1 - q) + (b_2 - q) + \dots + (b_n - q) + nq$. Folosind punctul a) se

$$\text{obține } b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{(b_1 - q)(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} + nq, \text{ unde } q = \frac{\beta}{1-\alpha}. \text{ 71. Pu-}$$

nând $f(n) = a_n a_{n+1} \dots a_{n+k}$, avem $f(n+1) - f(n) = (k+1) r a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k}$,

$$\text{unde } r \text{ este rația. Dar } S = a_1 a_2 \dots a_k + \left[(f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + \dots + \right. \\ \left. + (f(n+1) - f(n)) \right] + \frac{1}{(k+1)r} \Rightarrow S = a_1 a_2 \dots a_k + \frac{a_{n+1} \dots a_{n+k-2} - a_1 a_2 \dots a_{k+1}}{(k+1)r}.$$

72. Punem $f(n) = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k-2}}$ și procedăm ca la exercițiul precedent,

folosind diferențele $f(n) - f(n + 1)$. Avem $S = 1 \cdot \frac{1}{(k-1)d} \left(\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k-1}} \right)$ unde d este rația progresiei. **73.** a) Calculăm $qS_1 - S_1$

și găsim $qS_1 - S_1 = \frac{q^{n+1} - q}{q-1} + nq^{n+1}$, de unde $S_1 = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}q}{(q-1)^2}$. Proce-

dând analog ca la a) găsim $S_2 = 2 \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^3} - \frac{(2n-1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2} - \frac{n^2 q^{n+1}}{q-1}$.

74. Se observă că $a_{k+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1}$. Se calculează apoi, $\sum_{k=0}^n C_n^k a_{k+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1} \right)$, se găsește $\sum_{k=0}^n C_n^k a_{k+1} = 2 \cdot \frac{2^n S_{n+1}}{n+1} - \sum_{k=0}^n C_n^k a_{k+1}$,

de unde rezultă relația căutată.

Capitolul XII

NOȚIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. a) 9; b) 1; c) 5; d) 8; e) 15; f) 20; g) 735. 2. a) 40; b) 60; c) 50; d) 2. 3. 149. 4. 126. 5. $a=12$, $b=48$ sau $a=24$, $b=36$ sau $a=36$, $b=24$ sau $a=48$, $b=12$. 6. $a=6$, $b=216$ sau $a=24$, $b=54$. 7. $a=184$, $b=176$ sau $a=56$, $b=16$. 8. 1, 4, 8, 4, 4, 7, 5. 9. a) 1; b) 1. 10. 7^{7^7} este de forma $4k+3 \Rightarrow 7^{7^7} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. 11. $n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 1! + 2! + \dots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. Un pătrat perfect are ultima cifră 0 sau 1 sau 4 sau 5 sau 6 sau 9. Pentru $n=4$, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ nu este pătrat perfect. 12. n este de forma $7k$, $7k+1$, $7k+2$, $7k+3$, $7k+4$, $7k+5$, $7k+6$. Se calculează n^3 pentru fiecare caz în parte. 13. $n=1$, restul este 2; $n=2k$, restul este 2; $n=2k+1$ ($k \geq 1$) restul este 0. 14. a) Fie $d = (5n+3, 8n+3) \Rightarrow d \mid -8(5n+3) + 5(8n+3) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d=1$; b) $d = (33n+4, 22n+3) \Rightarrow d \mid 3(22n+3) - 2(33n+4) \Rightarrow d=1$. 15. Se face analog cu 14. 16. Fie $d = (5a+17b, 2a+7b)$ și $d' = (a, b)$; $d \mid 5(2a+7b) - 2(5a+17b) \Rightarrow d \mid b$; $d \mid 7(5a+17b) - 17(2a+7b)$, rezultă $d \mid a \Rightarrow d \mid d'$, dar $d' \mid d \Rightarrow d=d'$. 17. $(a+b, a-b)=2$ dacă a, b sunt prime impare;

$(a + b, a - b) = 1$ dacă a sau b este egal cu 2. **18.** Se scrie $a = 7k + r$ ($0 \leq r \leq 6$) și $b = 7l + s$ ($0 \leq s \leq 6$). Se arată că $7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow r = s = 0$. **19.** și **20.** Se scrie $n = 6k + r$ cu $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **21.** $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{2}$; dacă n este impar $\Rightarrow 1^n + 4^n \equiv 2^n + 3^n \pmod{5} \Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{10}$. **23.** $\frac{(m+n)!}{m!n!} = C_{m+n}^n$. **24.** $5 \mid n^2 - 3n + 6 \Rightarrow 5 \mid n^2 + 2n + 6 \Rightarrow 5 \mid (n+1)^2 + 5 \Rightarrow 5 \mid (n+1)^2 \Rightarrow 5 \mid n+1 \Rightarrow n = 5k - 1$. **25.** $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2) \Rightarrow 6 \mid n(n+1)(n+2)$. **26.** $n = 7k + 1$ sau $n = 7k + 3$; **27.** $n = 3k \pm 1$. **28.** $n = 3k \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+1} + 2^{3k+2} \equiv 3 + 2^2 \equiv 0 \pmod{7}$; $n = 3k + 1 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+3} + 2^{3k+3} \equiv 27 + 8 \equiv 0 \pmod{7}$; $n = 3k + 2 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+5} + 2^{3k+4} \equiv 3^5 + 2^4 \equiv 0 \pmod{7}$. Pentru celălalt exercițiu se ține cont că $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$. **29.** $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n} \equiv 2^{4n+1} + 3 \cdot (-1)^{2n} \equiv (2^4)^n \cdot 2 + 3 \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$. **30.** $153^n + 45^n - 28^n \equiv 1 + 1 - 0 \equiv 0 \pmod{2}$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0 \pmod{5}$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 11^n + 11^n \equiv 0 \pmod{17}$. Deci numărul este divizibil cu $2 \cdot 5 \cdot 17 = 170$. **31.** și **32.** Se consideră cazurile $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$. **33.** $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 3 \cdot 9^n + 4a64^n \equiv 3(-2)^n + 4a(-2)^n \equiv (-2)^n(3 + 4a) \Rightarrow 11 \mid 4a + 3 \Rightarrow a = 11k + 2$. **34.** Se dezvoltă după binomul lui Newton, $(n+1)^n$. **35.** $C_p^k = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$. Cum $k < p \Rightarrow$ este prim cu $1 \cdot 2 \dots k \Rightarrow p \mid C_p^k$. **36.** $2^p - 2 = (1+1)^p - 2 = C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^{p-1}$ și se folosește 35. **37.** $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1) \Rightarrow a = 2$. Dacă $k = mn \Rightarrow 2^{mn} - 1 = (2^m)^n - 1 = (2^m - 1)((2^m)^{n-1} + \dots + 1) \Rightarrow 2^k - 1$ nu este prim. Deci, trebuie k să fie un număr par. **38.** a impar $\Rightarrow a^n + 1$ este par \Rightarrow nu este număr prim, contradicție. Scriem $n = 2'n'$ cu n' impar $\Rightarrow a^n + 1 = (a^{2'})^{n'} + 1 = (a^{2'} + 1)((a^{2'})^{n'-1} + \dots + 1) \Rightarrow n' = 1 \Rightarrow n = 2'$. **39.** 3 nu divide $3n^2 - 1$. Pentru a arăta că 5 nu divide pe $3n^2 - 1$ se scrie că n este de forma $5k$, $5k \pm 1$, $5k \pm 2$ și se calculează $3n^2 - 1$. Analog, pentru 7. **40.** Se scrie $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$;

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ unde $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ și p_1, p_2, \dots, p_n sunt numere prime.

Se obține $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \leq \dots$ oricare ar fi $1 \leq i \leq n$. Din aceste inegalități se deduce că $\alpha_i = \beta_i$ ($1 \leq i \leq n$) $\Rightarrow a = b$. **41.** Orice număr de forma $4k - 1$, în descompunerea sa în factori primi conține un factor prim de forma $4l - 1$. Presupunem că există un număr finit de numere prime p_1, p_2, \dots, p_n de forma $4k - 1$. Fie $N = 4 p_1 p_2 \dots p_n - 1$. Există un număr prim p de forma $4t - 1$ care divide pe $N \Rightarrow$ există $1 \leq k \leq n$ astfel încât $p = p_k \Rightarrow p_k \mid N \Rightarrow p_k \mid -1$, contradicție. **42.** Același raționament

ca la problema 41. **43.** $E = (n^2 + 3n + 1)^2$. **44.** $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{m} = \frac{p}{q} - \sqrt{n} \Rightarrow m = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbb{Q}. \text{ Fie } n =$$

$$= p_1 p_2 \dots p_t, p_i \text{ prime și } \sqrt{n} = \frac{r}{s} \Rightarrow p_1 p_2 \dots p_t = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow p_i \mid r (\forall i, 1 \leq i \leq t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i \mid s \Rightarrow \frac{r}{s} \text{ nu este ireductibilă. } \mathbf{45. } p \geq 5 \Rightarrow p = 6k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 36k^2 \pm$$

$$\pm 12k + 1 = 12(3k^2 \pm k) + 1. \mathbf{46.} \text{ Dacă } p = 3k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8p^2 + 1 \text{ se divide cu } 3 \text{ deci nu este prim. Deci } p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 73,$$

$$8p^2 - 1 = 71. \mathbf{47.} (0, 0); (2, 2). \mathbf{48.} (x - 2)(y - 2) = 4 \text{ și rezultă soluțiile:}$$

$$(3, 6); (4, 4); (6, 3). \mathbf{49.} \text{ Se scrie } (x^2 - 1)(y^2 - 1) = xy + 1. \text{ Dacă } x > 2 \text{ și } y >$$

$$> 2 \Rightarrow x^2 - 1 > x + 1 \text{ și } y^2 - 1 > y + 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) > (x + 1)(y + 1) >$$

$$> xy + 1. \text{ Dacă } x = 2 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y \text{ nu este natural. Dacă } x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1, \text{ nu este natural. } \mathbf{50.} (285, 5); (180, 10), (5, 15). \mathbf{51.}$$

$$\left[\sqrt{x} \right] = \frac{x-1}{4}. \text{ Se ține cont că } \sqrt{x} - 1 < \left[\sqrt{x} \right] \leq \sqrt{x}. \text{ Se obține } x = 13 \text{ și } x =$$

$$= 17. \mathbf{52.} \text{ Pentru orice } n \in \mathbb{N}, 12 \mid n^4 - n^2 - 24. \mathbf{53.} \text{ Dacă } n = p^\alpha m \text{ cu } m >$$

$$> 1 \text{ și } (p, m) = 1, \text{ atunci } p \text{ nu divide pe } C_n^p. \text{ Acum, dacă } d = (C_n^1, C_n^2, \dots,$$

$$C_n^{n-1}) \text{ și } d > 1; \text{ există un număr prim } q \text{ cu } q \mid d. \text{ Cum } d \mid C_n^1 \Rightarrow q \mid n \text{ și}$$

$$\text{putem scrie } n = q^\alpha m \text{ cu } (q, m) = 1 \text{ și } m > 1. \text{ Dar } q \text{ nu divide } C_n^{q^\alpha} \text{ și deci}$$

$$q \text{ nu divide } d, \text{ contradicție. Deci } d = 1. \mathbf{54.} \text{ Dacă } n = p^m, \text{ atunci se arată}$$

$$\text{că } (\forall) k, 1 \leq k \leq n - 1, p \text{ divide } C_{p^m}^k. \text{ Apoi se arată că } p^2 \text{ nu divide pe}$$

$C_{p^m}^{p^{m-1}}$. 55. Fie N numărul format din ultimele 2 cifre ale lui 2^{999} . Avem

$2^{999} \equiv N \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 2N \pmod{25}$. Dar $2^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2N \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow N \equiv 13 \pmod{25} \Rightarrow N = 13 + 25k$. Cum $4 \mid 2^{999} \Rightarrow 4 \mid N \Rightarrow 4 \mid 13 + 25k \Rightarrow k = 3 \Rightarrow N = 88$. 56. $(2k+1) + (2k+2) + \dots + [2k + (2n-1)] = 2nk + n^2 = n(n+2k)$. 57. $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ și fiecare factor este strict mai mare ca 1. 58.

Scriem $2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$. Dacă $A = 2^{2^{n-1}} - 1$, $B = 2^{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ și B sunt prime între ele. Se demonstrează afirmația prin inducție ținându-se cont de considerațiile făcute. 59. Se ține cont că orice divizor d al lui n este de forma $d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_n^{l_n}$ unde $0 \leq l_i \leq k_i$ ($\forall i$), $1 \leq i \leq n$.

60. $N = \overline{a_{n-1} \dots a_0} = 10^{n-1} a_{n-1} + \overline{a_{n-2} \dots a_0}$. Dar $a_{n-2} a_{n-3} \dots a_0 < 10 \cdot 10 \dots 10 =$

$= 10^{n-1} \Rightarrow N > a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$. 61. Fie a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , $n+1$ numere. Pentru fiecare a_i , există un număr natural $\alpha_i \geq 0$ astfel încât $n+1 \leq 2^{\alpha_i} a_i \leq$

$\leq 2n$. Rezultă că există i, j astfel încât $2^{\alpha_i} a_i = 2^{\alpha_j} a_j$. Dacă $\alpha_i \leq \alpha_j \Rightarrow a_i = 2^{\alpha_j - \alpha_i} a_j \Rightarrow a_j \mid a_i$. 62. Avem $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$. Cum $6 \mid a+b+c$ rezultă că a, b sau c este par rezultă că $6 \mid 3abc$. 63. Dacă $m = n+2$ rezultă $(n^2 + 2n + 2) \mid n^4 + 4$ și $n^2 + 2n + 2 \mid m^4 + 4$. 65. În $50!$, 2 are exponentul egal

cu $\sum_{\alpha \geq 1} \left[\frac{50}{2^\alpha} \right] = \left[\frac{50}{2} \right] + \left[\frac{50}{4} \right] + \left[\frac{50}{8} \right] + \left[\frac{50}{16} \right] + \left[\frac{50}{32} \right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$

În $100!$, 2 are exponentul egal cu 97. 66. Scriem $n+k = 2^{\alpha_k} u_k$, unde u_k este impar ($1 \leq k \leq m$). Fie α_{k_0} , cel mai mare dintre toți α_k . Se arată că α_k este unic. În continuare:

$$N = \sum_{k=1}^m \frac{\pm 1}{n+k} = \sum_{k=1}^m \frac{\pm 1}{q^{\alpha_k} u_k} = \frac{\text{Suma de numere pare} + \text{un numar impar}}{q^{\alpha_{k_0}} \cdot u}$$

unde u este impar. Deci $N = \frac{p}{q}$, unde p este impar și q este par $\Rightarrow N \notin \mathbb{Z}$.

67. Se observă că $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5 = (n-1)n(n+2) + 5 = 8k + 5$. Dar orice pătrat perfect este de forma $8k+1$. 68. Dintre numerele a_1, a_2, \dots, a_9 , 5 sunt impare și 4 pare, de aceea trebuie să avem un factor de forma $a_k - k$, cu a_k impar și k tot impar. 69. Cubul unui număr întreg nedi-

vizibil cu 9 este de forma $9k + 1$. Dacă nici unul din numerele a, b sau c nu este divizibil cu 9 înseamnă că $a^3 + b^3 + c^3$ este de forma $9k' \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9 pentru nici o combinație de semne. **70.** Numerele $n = 65k \pm 4$, cu $k \in \mathbb{Z}$, satisfac condițiile. **71.** A se vedea 61. **72.** Se demonstrează prin inducție după n . Pentru $n = 1$ obținem că din orice 3 numere se pot alege două cu suma pară. Dacă avem $2^{n+1} - 1$ numere le împărțim în $2^n - 1$ grupe de câte două iar cel de-al $(2^{n+1} - 1)$ -lea număr îl punem în prima grupă. Din aceste trei numere extragem două cu suma număr par. Numărul rămas îl așezăm în grupa a doua apoi repetăm raționamentul ș.a.m.d. **73.** Se ține cont de formula care dă numărul tuturor divizorilor unui număr (vezi problema 59). **74.** Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$; p_1, p_2, \dots, p_r numere prime rezultă numărul divizorilor pozitivi ai lui n este $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1) \Rightarrow 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1) =$ = numărul tuturor divizorilor. Acest număr este de forma $4m + 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha_i + 1$ este impar $(\forall) i, 1 \leq i \leq r \Leftrightarrow \alpha_i$ este par $(\forall) i, 1 \leq i \leq r \Leftrightarrow |n|$ este un pătrat perfect. **75.** Fie n prim și $n = 10^k + 10^{k-1} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^{k+1} - 1}{9}$. Suma cifrelor lui n este $k + 1$. Dacă $k + 1$ nu este prim $\Rightarrow \Rightarrow k + 1 = r \cdot S$, cu $r > 1$ și $S > 1 \Rightarrow n$ nu este prim. **76.** De exemplu, $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)$. **77.** Dacă $m \geq n$ scriem $m = nq_1 + r_1$ cu $0 \leq r_1 < n$. Dacă $d = (a^m - 1, a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^m - a^n \Rightarrow \Rightarrow d \mid a^{m-n} - 1 \Rightarrow d \mid (a^{m-n} - 1) - (a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^{m-2n} - 1$ ș.a.m.d. rezultă $d \mid a^{m-nq} - 1 \Rightarrow d \mid a^n - 1$. Scriem acum $n = r_1q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$. La fel ca mai sus obținem $d \mid (a^{r_2} - 1)$. Aplicând algoritmul lui Euclid obținem $d \mid a^{(m,n)} - 1$. Este clar că $a^{(m,n)} - 1$ divide pe $a^m - 1$ și pe $a^n - 1$ și deci $d = a^{(m,n)} - 1$. **78.** Fie $N = n! - 1$. Se arată că $(N, k) = 1, (\forall) k, 1 \leq k \leq n$. Deci N are în descompunerea sa un număr prim mai mare ca n . **79.** Dacă $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$, rezultă $a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt[3]{ab} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a, b$ sunt cuburi perfecte. **80.** $2^{30} \equiv 0 \pmod{8}$. $2^{30} = 4^{15} = (5 - 1)^{15} = \mathcal{M}5^3 - C_{15}^2 5^2 + C_{15}^1 5 - 1 = \mathcal{M}5^3 + 74$.

Deci $2^{30} = 824 \pmod{1000}$. 81. $39^{30} = (40 - 1)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2 + +40C_{30}^1 - 1 = \mathcal{M}10^3 + 199$; $38^{30} = (40 - 2)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2 2^{28} + +40C_{30}^1 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 200 \cdot 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99 \cdot 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + + 99824 = \mathcal{M}10^3 + 576$; $39^{30} - 38^{30} = \mathcal{M}1000 + 199 - 576 = \mathcal{M}1000 + + 623$. Deci ultimele 3 cifre sunt 6, 2, 3.

Capitolul XIII

POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI

ECUAȚII ALGEBRICE

1. $q = X^3 - X - 4$, $r = 8$; b) $q = X + 6$, $r = 9X^2 + 5X - 5$; c) $q = X^4 + + 2X^3 + 2X + 11$, $q = 2X - 8$; d) $q = X^5 + X^3 - X^2 + 9X - 5$, $r = 35X^2 - 29X + 6$;
2. $q = 2X^3 - X^2 + 4X - 3$, $r = 6$; b) $3X^4 + 2X^3 + 11X^2 + 22X + 45$, $r = 93$;
c) $-2X^5 + 14X^4 - 47X^3 + 141X^2 - 423X + 1272$, $r = -3809$; d) $q = 2X^2 + + 4X - 9$, $r = \frac{27}{2}$. 3. $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. 4. Pentru $m \neq -1$ și $m \neq 2$

(rădăcinile ecuației $m^2 + 3m + 2 = 0$) gradul polinomului este 4; pentru $m = -1$ gradul polinomului este zero; pentru $m = -2$ gradul polinomului este doi. 5. $f(\sqrt[3]{7+\sqrt{41}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{41}}) = 20$. 6. Se aplică binomul lui

Newton și se obține $f(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}) = 5$. 7. $f(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}) = 9$. 8. $f(\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}) = 16$. 9. I) Folosind bino-

mul lui Newton se calculează $f(a + f(a))$ și se obține: $f(a)[1 + a_1 + 2a_2a + + a_2f(a) + \dots]$; II) $a = ka_0$, $k \in \mathbf{Z}$. 10. $f = kX$, $k \in \mathbf{R}$. 11. $f(2) = 4$ și se găsește $m = -\frac{3}{2}$. 12. $f(1) = 5$, $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. 13. Polinomul de grad

minim este $f = aX + b$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -3$ și se găsește $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. 14. Scriem $f = (X - a)(X - b)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$.

Avem $f(a) = \alpha a + \beta$ și $f(b) = \alpha b + \beta$. Apoi se rezolvă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a) \\ \alpha b + \beta = f(b) \end{cases}$$

15. Scriem $f = (X^2 + 1)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(i) =$

$= \alpha + \beta$ unde $f(i) = (a_1 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - \dots)$.
16. $f(-2) = 0$, $m = -32$. **17.** $f(1) = 0$, $q = X^4 - 3X^3 - 2X + 3$. **18.** a) $f(-1) = (-2)^n - 2^n = 0$; b) $(X-1)^n - (X+3)^n = [(X+1)-2]^n - [(X+1)+2]^n = -(X+1) \cdot [C_n^1(X+1)^{n-2} \cdot 2 + C_n^3(X+1)^{n-4} \cdot 2^3 + C_n^5(X+1)^{n-6} \cdot 2^5 + \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1}]$, pentru $n = 2k$. **19.** $f(i) = (i^2 + i + 1)^{4n+1} - i = i^{4n+1} - i = 0$, $f(-i) = 0$. **20.** Scriem $f = n X^{n+1}(X-1) - X(X^n - 1) = (X-1)(nX^{n+1} - X^n - X^{n-1} - \dots - X)$. **21.** Scriem $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3 = (X-1)[(X^n - 1) + (X^{n-1} - 1) + (X^{n-2} - 1)]$. **22. Metoda I.** Scriem $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n-3} = [2(X^2 + 1) + X]^{2n-1} + [2(X^2 + 1) - X]^{2n-3}$. Dezvoltând după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{2n-1} - X^{2n+3}$ se divide prin $X^2 + 1$. $f = X^{2n-1} - X^{2n+3} = X^{2n-1}(1 - X^4) = X^{2n-1}(1 + X^2)(1 - X^2)$. *Metoda a II-a.* Se aplică teorema lui Bézout; se calculează $f(i)$ și $f(-i)$; $f(i) = i^{2n-1} + i^{2n+3} = i^{2n-1}(1 + i^4) = 0$. La fel, pentru $f(-i)$. **23.** Fie ε o rădăcină oarecare a polinomului $X^2 + X + 1$. Se aplică teorema lui Bézout $f(\varepsilon) = \varepsilon^{6n-1} + \varepsilon + 1 = \frac{\varepsilon^{6n}}{\varepsilon} + \varepsilon + 1 = \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon}{\varepsilon} = 0$. **24. Metoda I:** Scriem $(X^4 - X - 1)^{2n+1} + (X^4 + X - 1)^{2n+5} = [(X^4 - 1) - X]^{2n+1} + [(X^4 - 1) + X]^{2n+5}$. Aplicând binomul lui Newton rezultă că este suficient să arătăm că: $(-X)^{2n+1} + X^{2n+5}$ se divide prin $X^2 + 1$. Dar $-X^{2n+1} + X^{2n+5} = -X^{2n+1}(1 - X^4)$. *Metoda II:* $f(i) = (1 - i - 1)^{2n+1} + (1 + i - 1)^{2n+5} = (-i)^{2n+1} + i^{2n+5} = 0$. **25. Metoda I:** $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X = [(X^2 - 1) + X]^{4n+1} - X$. Dezvoltând după binomul lui Newton se constată că este suficient ca $X^{4n+1} - X$ să se dividă prin $X^2 - 1$. Se observă că $X^{4n+1} - X = X(X^{4n} - 1) = X(X^{2n} - 1) \cdot (X^{2n} + 1)$. *Metoda II.* Se calculează $f(1) = 1^{4n+1} - 1 = 0$, $f(-1) = 0$. **26.** Se notează cu α rădăcina polinomului $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ care verifică $\alpha^5 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ și $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Aplicând teorema lui Bézout $f(\alpha) =$

$= \alpha^{5a_1} + \alpha^{5a_2+1} + \alpha^{5a_3+3} + \alpha^{5a_4+3} + \alpha^{5a_5+4} = (\alpha^5)^{a_1} + (\alpha^5)^{a_2} \cdot \alpha + (\alpha^5)^{a_3} \cdot \alpha^2 +$
 $+ (\alpha^5)^{a_4} \cdot \alpha^3 + (\alpha^5)^{a_5} \cdot \alpha^4 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$. **27.** $(X^2 + X + 1)^{8n+1} -$
 $- X = \left[(X^2 + 1) + X \right]^{8n+1} - X$. Dezvoltând după binomul lui Newton este
suficient să arătăm că $X^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$. Dar $X^{8n+1} - X =$
 $= X(X^{8n} - 1) = X \left[(X^8)^n - 1 \right]$ se divide cu $X^8 - 1 = (X^4 + 1)(X^4 - 1) = (X^4 +$
 $+ 1)(X^2 + 1)(X^2 - 1)$. **28.** Se folosește teorema lui Bézout:
 $f(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+3} + \alpha^{2n+3} = (\alpha^2)^{n+3} + \alpha^{2n} \cdot \alpha^3 = \alpha^{2n} \cdot \alpha^6 + \alpha^{2n} \cdot \alpha^3 = \alpha^{2n} \alpha^3 \cdot$
 $\cdot (\alpha^3 + 1) = 0$ (α este rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$ deci care verifică
relațiile $\alpha^3 = -1$ și $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$). **29.** $f = (X + 1)^3 - \left(\frac{3}{8}X^2 + \frac{9}{8}X - 1 \right) + 1$.
30. Fie $f = (X - 1)^m - X^m + 1$. Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 - X + 1$
trebuie ca $f(\alpha) = 0$. Cum $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, atunci $f(\alpha) = \alpha^{2m} - \alpha^m + 1$.
Dacă: $m = 6k \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^{12k} - \alpha^{6k} + 1 = 1 \neq 0$, $m = 6k + 1 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 -$
 $- \alpha + 1 = 0$, $m = 6k + 2 \Rightarrow f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha + 1 \neq 0$, $m = 6k + 3 \Rightarrow f(\alpha) =$
 $= 3 \neq 0$, $m = 6k + 4 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0$, $m = 6k + 5 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 -$
 $- \alpha + 1 = 0$. Valorile lui m căutate sunt $m = 6k + 1$ și $m = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$.
31. Se procedează la fel ca la problema precedentă. Se găsește $m = 6k + 2$ și
 $m = 6k + 4$. **33.** Dacă α este rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, rezultă
 $\alpha^{1993} + \alpha^2 + 1 = 0$, deci $X^2 + X + 1$ divide $X^{1993} + X^2 + 1$. Câtul este $X^{1991} -$
 $- X^{1990} + X^{1988} - X^{1987} + \dots + X^5 - X^4 + X^2 - X + 1$. **36.** Pentru $x = 0$
egalitatea devine: $0 \cdot P(-1) = -26P(0) \Rightarrow P(0) = 0$. Pentru $x = 1$ egalitatea
devine: $P(0) = -25P(1) \Rightarrow P(1) = 0$. Pentru $x = 26$ avem $26P(25) = 0$.
 $P(26) \Rightarrow P(25) = 0$. Rezultă că $P(X) = X(X - 1)(X - 25)Q(X)$. Înlocuind
găsim o nouă relație $(X - 2)Q(X - 1) = (X - 25)Q(X)$. Procedând ca mai
sus găsim că $Q(X) = (X - 2)(X - 24)R_1(X)$. Continuând calculele se
găsește că $R_1(X) = (X - 3)(X - 23)R_2(X)$ rezultă $P(X) = X(X - 1)(X - 2)(X -$
 $- 3) \dots (X - 24)(X - 25)R(X)$. Înlocuind în egalitatea din enunț rezultă că
 $R(X - 1) = R(X)$ și polinomul fiind de grad n care îndeplinește condițiile
 $R(0) = R(1) = R(2) = \dots = R(n) = k$ avem $P(X) = kX(X - 1)(X - 2) \dots (X - 25)$.
37. Pentru $x = 0$ egalitatea devine $(-3)f(1) = 0$ deci $f(X)$ se divide cu $X -$
 $- 1$. Pentru $x = 3$ vom avea $3f(3) = 0$, deci $f(X)$ se divide cu $X - 3$. Rezultă

că $f(X) = (X - 1)(X - 3) \cdot Q(X)$ și înlocuindu-se în relația dată $f(X)$ și $f(X + 1)$ se obține $(X - 1)Q(X) = (X - 2)Q(X + 1)$. Pentru $x = 2$, $Q(2) = 0$ deci $Q(X)$ se divide cu $X - 2$ deci $f(x) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)R(X)$ și înlocuind în egalitatea din enunț obținem: $X(X - 1)(X - 2)(X - 3)R(X) = (X - 3)X(X - 1)(X - 2)R(X + 1)$ deci $R(X) = R(X + 1)$, adică $R(0) = R(1) = R(2) = \dots = R(n) = k$. Rezultă că polinomul de gradul n , $R(X) = k$. Deci $f(X) = k(X - 1)(X - 2)(X - 3)$. **41.** $P(X) = X$. **42.** Dacă $f(X) = \frac{1}{2}[cX^2 + (2b - c)X + 2a]$,

$$a, b, c \in \mathbf{Z}, \Rightarrow f(n) = \frac{1}{2}[cn^2 + (2b - c)n + 2a] = \frac{1}{2}[cn(n - 1) + 2(bn + a)];$$

$n(n - 1)$ se divide la 2, $(\forall)n \in \mathbf{Z}$. Deci $f(n) \in \mathbf{Z}$. Reciproc, fie $f(X) = aX^2 + bX + c$; $a, b, c \in \mathbf{Q}$. Dacă $f(n) \in \mathbf{Z} (\forall) n \in \mathbf{Z}$, atunci și $f(0) \in \mathbf{Z}$, $f(1) \in \mathbf{Z}$, $f(-1) \in \mathbf{Z}$. Dar $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$. Deci $c \in \mathbf{Z}$, $a + b + c = K_1 \in \mathbf{Z}$, $a - b + c = K_2 \in \mathbf{Z}$. Rezultă că există:

$$a = \frac{K_1 + K_2 - 2c}{2}, b = \frac{K_1 - K_2}{2}, c = c. \text{ Între } K_1 + K_2 - 2c \text{ și } K_1 - K_2 \text{ rela-}$$

$$\text{ția } K_1 + K_2 - 2c = m; K_1 - K_2 = 2n - m; f(x) = \frac{1}{2}[mx^2 + (2n - m)x + 2c],$$

unde $m, n, c \in \mathbf{Z}$. **43.** a) c.m.m.d.c = $2X^2 - 3X + 2$; b) c.m.m.d.c = $X - 2$; c) c.m.m.d.c = $X^2 + 2X + 2$; d) c.m.m.d.c = $X^2 + 2X + 2$; e) c.m.m.d.c = $2X^2 + 5x + 3$. **44.** Se arată că c.m.m.d.c = 1. **45.** Dacă $f(X)$ este un c.m.m.d.c al polinoamelor $X^n - 1$ și $X^m - 1$ atunci orice rădăcină a lui

$f(X)$ este o rădăcină a lui $X^d - 1$ unde $d = (m, n)$ este un c.m.m.d.c. Invers, aplicând teorema: fie f și g două polinoame. Dacă d este c.m.m.d.c al lui f și g , atunci există polinoamele u și v astfel încât $d = uf + vg$, orice rădăcină a lui $X^d - 1$ este rădăcină a lui $f(X)$. Deci $f(X) = X^d - 1$. **46.** Fie $d = (m, n)$. Procedând ca la exercițiul precedent se

obține: dacă numerele $\frac{m}{d}$ și $\frac{n}{d}$ sunt impare, atunci un c.m.m.d.c al po-

linoamelor date este $X^d + a^d$, dacă cel puțin unul dintre numerele

$\frac{m}{d}$ și $\frac{n}{d}$ este par un c.m.m.d.c al polinoamelor este 1. **47.** a) $X^4 - 1 = (X^2 +$

$+ 1)(X - 1)(X + 1)$; b) $X^6 - 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X - 1)(X^2 + X + 1)$; c)

$$X^8 - 1 = (X^4 + 1)(X^2 + 1)(X + 1)(X - 1) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

$$\cdot (X^2 + 1)(X + 1)(X - 1). \text{ 48. Da } 49. f = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

50. a) Folosind formulele lui Viète se obține: $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -3, x_4 =$

$= -2$; b) $m = -20, x_1 = 5, x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = -3$; c) $m = 47, x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 =$

$= -\frac{1}{6}$; d) $m = -228, x_1 = -3, x_2 = 9, x_3 = 3 - 2\sqrt{5}, x_4 = 3 + 2\sqrt{5}$; e) $x_1 =$

$= 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$; f) $x_1 = 7, x_2 = 4, x_3 = -\frac{1}{3}$; g) $x_1 = 2, x_2 = -5,$

$x_3 = 3, x_4 = -1$; h) $m = 35, x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = -4$; i) $m = 24, x_1 =$

$= -3, x_2 = -4, x_3 = 2$; j) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 5, x_3 = -7$; k) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = \sqrt{3}$ etc.

51. a) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, atunci

$x_1^3 + px_1 + q = 0, x_2^3 + px_2 + q = 0, x_3^3 + px_3 + q = 0$. Se adună aceste

relații membru cu membru și se obține: $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q + pS_1 =$

$= -3q - p \cdot 0 = -3q$. Pentru a obține pe $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, se înmulțesc

ecuațiile de mai sus cu x_1, x_2 respectiv x_3 și se obține $S_4 = -pS_2 - qS_1$ (am

notat $S_1 = x_1 + x_2 + x_3, S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ș.a.m.d.). Se procedează ca la

punctul a). 52. a) desfacem parantezele și regrupăm termenii dând factor

pe m și se obține $(x - 2)(x^2 + (2m - 3)x + 3 - m) = 0$; b) Ținând cont că

$|x_2 - x_3| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2}$ și de relațiile dintre rădăcini și coeficienți pentru

ecuația de gradul doi se obține: $m_1 = 4, m_2 = -\frac{1}{2}$. 53. a) Ecuația se mai

poate scrie $a^2(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) - 2ax(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) + (-2x^3 + x^2 +$

$+ 8x - 4) = 0$; rădăcinile independente de a sunt $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \frac{1}{2}$;

b) Rădăcina care depinde de $a, x_4 = \frac{a^2 + 1}{2a}$; se găsește $a = 0$. 54. a) Pentru

ca ecuația să aibă o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$ trebuie ca $f(-1) \cdot f(1) <$

< 0 și $f(-1) \cdot f(1) = -(m + 1)^2$; b) Folosind formulele lui Viète se obține

$m = -1, x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1$; c) Relația se mai poate scrie

$x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 < 6x_1^2 x_2^2 x_3^2; x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 = (x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2)^2 -$

- $2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$. Din relațiile lui Viète se obține $m^2 - 4 < 0$; $m \in (-2, 2)$. **55.** Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că toate rădăcinile sunt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j \Leftrightarrow (a+1)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right) + \sum_{i=1}^4 x_i^2 \Rightarrow -a^2 + a - 1 = \sum_{i=1}^4 x_i^2$, contradicție, deoarece $-a^2 + a - 1 < 0$ (\forall) $a \in \mathbf{R}$. **56.** La fel ca la exercițiul de mai sus, se observă că $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = -m^2 - 2$. **57.** Scriem $f(X - 1) = X^3 - 2X^2 + (a + 1)X - a + b$. Aplicăm teorema lui Bézout și $f(-1) = -4 \Rightarrow -2a + b = 0$. Din relațiile lui Viète, la fel ca la exercițiul 51, se obține $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3a - 3b$ de unde $a - b = 3$. Se obține $a = -3$, $b = -6$. **58.** Se procedează ca la exercițiul de mai sus și se obține: $a = -\frac{1117}{14}$, $b = \frac{2241}{14}$. **59.** Scriem $e^{f(x)} \leq 1$, $e^{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} \leq e^0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \leq 0$; $(x^2 - 1)(x - 1)^2 \leq 0$; $x \in [-1, 1]$. **61.** Dacă α este o rădăcină dublă, atunci α este rădăcină a lui $f - D(f) = \frac{X^n}{n!}$. Deci $\alpha = 0$. Dar $f(0) = 1$, contradicție. **63.** Se calculează $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ ca în exercițiul 47 și se obține $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5m$; $5m = 10$; $m = 2$. **64.** Se face transformarea $y = x + 1$ deci $x = y - 1$ și se înlocuiește în prima ecuație; se obține $y^3 - y^2(3 - a) + y(3 - 2a + b) + a - b + c - 1 = 0$. De unde se găsește sistemul $a - b - c = 3$; $3a - b + c = 3$; $2b - c = -1$. Se obține $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. **65.** Se calculează $f(-1) \cdot f(1)$ și se arată că $f(-1) \cdot f(1) = -(m^2 - m + 1)(m^2 + m + 5)$. Deci $f(-1) \cdot f(1) < 0$. **66.** Considerăm rădăcinile $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$, $x_4 = q^3x_1$. Aplicând relațiile lui Viète se găsește $q = -2$, $x_1 = -1$; $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$ și $m = 64$. **67.** a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$ din relațiile lui Viète; b) $-m^3 - 3m + 3 \geq 3(m + 1)^2 \Rightarrow -m^3 - 3m^2 - 3m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$; c) Se calculează $f(1)$ și se găsește $m = -1$, rădăcinile ecuației sunt $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}i$, $x_3 = -\sqrt{2}i$. **68.** Se aplică relațiile lui Viète și se obține ecuația: $S_1^6 + 20S_1^2 - 144 = 0$ (unde $S_1 = x_1 + x_2$). Se rezolvă ecuația și se găsesc soluțiile: 2 și -2. Rădăcinile ecuației sunt: $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = -1 +$

+ $\sqrt{2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{2}$ sau $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$. 69. Scriem a) $X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p = (X^2 + 1)(X^2 - 2X) + (n + 2)X + p$ de unde se obține că $n = -2$ și $p = 0$. b) $g(1) + g(2) + \dots + g(n) = (1 - 2) + (2^2 - 2 \cdot 2) + (3^2 - 3 \cdot 2) + \dots + (n^2 - n \cdot 2) = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.

70. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = a(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + c(1 + 2 + \dots + n) + nd$. Din $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = n^4$ se găsește $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$. 71. Se verifică rădăcina $x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$. Se formează relațiile Viète și se găsește că $x_2 + x_3 = -x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$ și $x_2 x_3 = \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}} = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} + 1$. Se formează ecuația de gradul doi și se constată că $\Delta < 0$.

72. 73. Se procedează analog ca la exercițiul 71. 74. Rădăcina reală este $z = 2$. Scriem $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = (z - 2)[z^2 - (1 + 2i)z + 3(1 + i)] = 0$. 75. a) Se aplică teorema lui Bézout și se obține sistemul de ecuații $c = 0$; $1 + a + b = 0$; $1 - a - b = 0$, sistem care nu are soluții;

b) Ecuația admite ca rădăcină și pe $x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; se obține $a = -2$; $b = 1$, $c = -2$. Rădăcinile reale ale ecuației sunt $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. 76. Aplicând relațiile lui Viète se obține $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ și $m = -7$. 77. Se aplică relațiile lui Viète. 78. $a = 3$. 79. Se folosesc relațiile lui Viète și se găsesc sistemele de soluții: $(a = 1, b = -1, c = 1)$, $(a = \lambda, b = 0, c = 0)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. 80. Avem următoarea teoremă: orice polinom $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de grad $n \geq 1$ cu coeficienți reali este un produs de polinoame de gradul I sau II cu coeficienți reali, adică poate fi scris sub forma: $f = a_n(X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_p)^{k_p} (X^2 + b_1X + c_1)^{l_1} \dots (X^2 + b_sX + c_s)^{l_s}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ și $b_1^2 - 4c_1 < 0, \dots, b_s^2 - 4c_s < 0$. Aplicând această teoremă și ținând cont de ipoteză, f se scrie sub forma $f = g^2 \cdot h$ unde h nu are nici o rădăcină reală. Vom împărți rădăcinile complexe ale lui h în două grupe: rădăcinile complexe conjugate fac parte din grupe distincte. Făcând produsul factorilor liniari care corespund rădăcinilor fiecărei

grupe obținem polinoamele $h_1 + ih_2$ și $h_1 - ih_2$ și $h = (h_1 + ih_2)(h_1 - ih_2) = h_1^2 + h_2^2$. Deci $f = (gh_1)^2 + (gh_2)^2$. **81.** Dacă α este o rădăcină întreagă a lui f avem $f = (X - \alpha)g$. Deci $f(a) = (a - \alpha)g(0)$ și $f(a + 1) = (a + 1 - \alpha)g(1)$, de unde $a - \alpha \mid f(0)$ și $a + 1 - \alpha \mid f(1)$, contradicție. **82.** Conform ipotezei există a_1, a_2, a_3, a_4 numerele întregi distincte astfel încât $f - 1 = (X - a_1) \cdot (X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)g$, unde $g \in \mathbb{Z}[X]$. Dar oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ numărul $(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)(a - a_4)$ nu poate fi egal cu -2 . Deci $f(a) - 1 \neq -2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$. Pentru ultima afirmație din problemă răspunsul este negativ. **83.** Din teorema lui Bézout obținem $f - 12 = (X - a) \cdot (X - b)(X - c)(X - d)g$, unde $g \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $f(k) = 17 \Rightarrow (k - a)(k - b) \cdot (k - c)(k - d)g(k) = 29$. 29 fiind prim \Rightarrow cel puțin 2 factori dintre $k - a, k - b, k - c, k - d$, sunt egali cu $+1$ sau -1 . De exemplu dacă $k - a = k - b - 1 \Rightarrow a = b$, contradicție. **84.** Se aplică același procedeu ca în problema 83. **86.** Se desființează parantezele și se face o nouă grupare de termeni: $(x^2 + 3)(x^2 + mx + 2m) = 0$; b) La fel ca la exercițiul 84 se obține $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + m) = 0$. **87.** Se face schimbarea de variabilă $y = \frac{-3 - x}{x}$ și se obține ecuația $y^3 + 18y^2 + 60y + 16 = 0$.

b) Se calculează $y_1 + y_2 + y_3 = -\left[\frac{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2}{(x_1 x_2 x_3)^2}\right] + 3 = -16$;

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^2) + 3x_1 x_2 x_3}{(x_1 x_2 x_3)^2} = -16 ;$$

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 x_2^2 - x_2^2 x_3^2 - x_1^2 x_3^2 + (x_1 x_2 x_3)^2 - 1}{(x_1 x_2 x_3)^2} = 0 ; \text{ deci ecu-}$$

ția este $y^3 + 16y^2 - 16y = 0$. c) Se procedează ca la punctul b) și se găsește $y_1 + y_2 + y_3 = 22$; $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = 60$; $y_1 y_2 y_3 = 40$; deci ecuația este $y^3 - 22y^2 + 60y - 40 = 0$. d) Se face schimbarea de variabilă $x = -3 - y$ și se obține ecuația $y^3 + 6y^2 + 4y - 13 = 0$. e) Se face schimbarea de variabilă $x = -\frac{1}{y}$ și se obține ecuația $y^3 + 5y^2 + 3y - 1 = 0$. f) Se face schim-

barea de variabilă $x = \frac{1 + 3y}{-y}$ și se obține ecuația $16y^3 - 4y^2 - 6y - 1 = 0$.

88. a) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{k-1}$ și se obține $y^3 - 3(k-1)^2 y + (k-1)^3 = 0$. **b)** Se aplică relațiile lui Viète și se obține ecuația $y^3 - 9y^2 + 18y + 24 = 0$. **c)** $y_1 = 6 - x_1^2$, $y_2 = 6 - x_2^2$, $y_3 = 6 - x_3^2$; $y_1 + y_2 + y_3 = 12$; $y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3 = 45$; $y_1 y_2 y_3 = 53$; \Rightarrow ecuația: $y^3 - 12y^2 + 45y - 53 = 0$.

90.
$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2}{x_3^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2^2}{x_2^2} =$$

$$= \frac{2p}{x_1^2} - 1 + \frac{2p}{x_2^2} - 1 + \frac{2p}{x_3^2} - 1 = \frac{2p^3 - 3q^2}{q^2}.$$

91. Deducem $a = \frac{b-4}{3-2b}$ și

înlocuind obținem $b^3 - 4b^2 + 9b - 11 = 0$. Un polinom de tipul cerut este $X^3 - 4X^2 + 9X - 11$. **92.** Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației, atunci avem: $x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0$; $x_2^4 - 2x_2^3 + 3x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0$; $x_3^4 - 2x_3^3 + 3x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$; $x_4^4 - 2x_4^3 + 3x_4^2 - 4x_4 + 1 = 0$. Se împart egalitățile cu x_1, x_2, x_3 respectiv x_4 și se adună acestea, membru cu membru, deci: $S_3 - 2S_2 + 3S_1 - 16 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0$; $S_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i + x_4^i$.

Se fac calcule și se obține $S_3 = 2$. **93. a)** $x_1 = 3\sqrt{2}$, $x_2 = -3\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$,

$x_4 = -1$; **b)** $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$; **c)** $x_1 = 6i$, $x_2 = -6i$,

$x_3 = -\frac{1}{5}$, $x_4 = -\frac{4}{5}$. **d)** $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $m = 23$, $n =$

$= 10$; **e)** $x_1 = \sqrt{2} + i$, $x_2 = \sqrt{2} - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{1}{2}$; **f)** $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$,

$x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_5 = 56$; **g)** $x_1 = 1 +$

$+\sqrt{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -64$; **h)** $x_1 = -i$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$; **i)** $x_1 = 1 + \sqrt{2}$,

$x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 0$; $n = -1$, $p = 0$; **j)** $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 2$, $x_4 =$

$= 3$, $a = -37$, $b = 30$; **k)** $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$,

$x_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $m = -10$, $n = 1$. **94.** Se aplică teorema lui Bézout, $m = 1$,

$n = p = -2$, $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **96. a)** Se face substituția $x^2 = y$ și se obține $x_1 = \sqrt{2m^2 - 3}$, $x_1 = -\sqrt{2m^2 - 3}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$; **b)** $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$; **c)** $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2\sqrt{3}$, $x_3 = 2\sqrt{2}$, $x_4 = -2\sqrt{2}$; **d)** $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = 1 + i\sqrt{3}$; **e)** $x_1 = \sqrt{m+1}$, $x_2 = -\sqrt{m+1}$, $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = -\sqrt{m}$; **f)** $x_1 = \sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **97. a)** $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{4}$, $x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{4}$; **b)** $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{3 + i\sqrt{55}}{8}$, $x_4 = \frac{3 - i\sqrt{55}}{8}$; **c)** $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; **d)** $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$; **e)** $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$; **f)** $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}$. **98.** Se notează $x^2 = y$ și se obține ecuația $y^3 - (m - 1)y^2 + (m - m^2)y + 2m - m^2 = 0$. Această ecuație se scrie $(y + 1)(y^2 - my + 2m - m^2) = 0$. Se obține rădăcina $y = -1$ și rădăcinile y_2, y_3 ale ecuației $y^2 - my + 2m - m^2 = 0$. **99.** Se împarte cu x^2 și se notează $x + \frac{m}{x} = y$; se obține ecuația $y^2 + y + 1 - 2m = 0$. **100.** Scriem $(x^2 + 1)(x - 1)^2 - ax^2 = x^4 - 2x^3 + (2 - a)x^2 - 2x + 1 = 0$, ecuație reciprocă. **101.** Se împarte cu x^2 și se notează $x + \frac{c}{x} = y$; se obține ecuația $y^2 + ay + b - 2c = 0$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{102.} \quad (x+z)^n &= \left(x+\bar{z}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{x+z}{x+\bar{z}}\right)^n = 1; \quad \frac{x+z}{x+\bar{z}} = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{x+a+bi}{x+a-bi} &= \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{2\cos^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}}{2\sin^2 \frac{k\pi}{n} - 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}} \Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{2\cos \frac{k\pi}{n}}{-2i \sin \frac{k\pi}{n}} \Rightarrow$$

$$\frac{x+a}{-b} = 2ctg \frac{k\pi}{n}. \quad \mathbf{103.} \quad (1-X)f = a_0 + (a_1 - a_0)X + (a_2 - a_1)X^2 + \dots + (a_n - a_{n-1})X^n - a_n X^{n+1}. \text{ Dacă } |\alpha| > 1 \Rightarrow |f(\alpha)(1-\alpha)| \geq a_n |\alpha|^{n+1} - |a_0 + (a_1 - a_0) + \dots + (a_n - a_{n-1})\alpha^n| > a_n |\alpha|^{n+1} - |\alpha|^n (a_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_n - a_{n-1}) = a_n |\alpha|^n (|\alpha| - 1) > 0. \text{ Deci } f(\alpha) > 0, \text{ contradicție. } \mathbf{104.} \text{ Fie } f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i,$$

$$g = \sum_{i \geq 0} b_i X^i; \text{ presupunem că } p \mid a_c, p \mid a_1, \dots, p \mid a_{k-1}, p \text{ nu divide } a_k \text{ și } p \mid b_0,$$

$$p \mid b_1, \dots, p \mid b_{l-1}, p \text{ nu divide } b_l. \text{ Scriem } fg = \sum_{i \geq 0} c_i X^i, \quad c_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_i b_j.$$

$$\text{Avem } c_{k+l} = a_0 b_{k+l} + a_1 b_{k+l-1} + \dots + a_k b_l + a_{k+1} b_{l-1} + \dots + a_{k+l} b_0 \Rightarrow p \mid c_{k+l} \Rightarrow p \text{ nu divide } fg, \text{ contradicție. } \mathbf{105.} \quad f = c(f)f', \quad g = c(g)g'; \quad f', g' \in \mathbb{Z}[X] \text{ și } \Rightarrow c(f') = c(g') = 1. \text{ Folosind problema 104 rezultă } c(f'g') = 1 \Rightarrow c(fg) = c(f) \cdot c(g). \quad \mathbf{106.} \text{ Presupunem că } f = gh, \quad g = b_0 + b_1 X + \dots + b_r X^r, \quad h = c_0 + c_1 X + \dots + c_s X^s, \quad g, h \in \mathbb{Z}[X]. \text{ Avem } a_0 = b_0 c_0, \quad a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1, \quad a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \dots, \quad a_i = b_i c_0 + b_{i-1} c_1 + \dots + b_0 c_i. \text{ Cum } p \mid a_0 \text{ și } p^2 \mid a_0 \text{ rezultă } p \mid b_0 c_0 \Rightarrow p \mid b_0 \text{ și } p \text{ nu divide } c_0. \text{ Din } p \mid a_1 \Rightarrow p \mid b_1 c_0 \Rightarrow p \mid b_1; \quad p \mid a_2 \Rightarrow p \mid b_2 c_0 \Rightarrow p \mid b_2. \text{ Continuând din } p \mid a_r (r \leq n-1) \Rightarrow p \mid b_r \Rightarrow p \mid a_n, \text{ contradicție. } \mathbf{107.} \quad f = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1; \quad f = \frac{X^p - 1}{X - 1}. \text{ Se}$$

$$\text{arată că polinomul } g = f(X + 1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + C_p^1 X^{p-2} +$$

$$+ C_p^2 X^{p-3} + \dots + C_p^{p-1} \text{ este ireductibil, cu criteriul lui Eisenstein } (p \mid C_p^k;$$

$$1 \leq k \leq p-1) \text{ și deci rezultă că } f \text{ este ireductibil. } \mathbf{108.} \text{ Se aplică problema 107. } \mathbf{109.} \text{ Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru } p = 3 \text{ sau } p = 5.$$

$$\mathbf{110.} \text{ Se aplică criteriul lui Eisenstein. } \mathbf{111.} \quad f = X^{2^n} + 1. \text{ Se arată că polinomul } g = f(X + 1) \text{ este ireductibil, cu criteriul lui Eisenstein,}$$

$$g = X^{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} C_{2^n}^k + 2. \text{ Se arată că } 2 \mid C_{2^n}^k, (\forall) 1 \leq k \leq 2^n - 1. \mathbf{112.} \text{ Poli-}$$

nomul este un produs dintre un polinom de gradul I și unul de gradul III \Leftrightarrow polinomul are o rădăcină întreagă $\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ este o rădăcină $\Leftrightarrow a + b + 2 = 0$ sau $a - b + 2 = 0$. Avem $X^4 + aX^2 + bX + 1 = (X^2 + \alpha X + \beta)(X^2 + \alpha'X + \beta')$; $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta\beta' = 1, \alpha\beta' + \alpha'\beta = b, \alpha\alpha' + \beta + \beta' = a, \alpha + \alpha' = 0$. Dacă $\beta = \beta' = 1 \Rightarrow b = 0$ și $a = 2 - k^2, k \in \mathbb{Z}$ cu $k \neq \pm 2$. Dacă $\beta = \beta' = -1 \Rightarrow b = 0$ și $a = -2 - k^2$ cu $k \neq 0$. **113.** Presupunem $f = gh$ cu $g, h \in \mathbb{Z}[X]$. Cum $f(a_i) = -1$, atunci $g(a_i)h(a_i) = -1$. Deci $g(a_i) = -1$ și $h(a_i) = 1$ sau $g(a_i) = 1$ și $h(a_i) = -1$, de unde $(g + h)(a_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Cum $\text{grad}(g + h) < n$ avem $g + h = 0$. Deci $f = -g^2$, contradicție deoarece coeficientul de grad maxim al lui f este 1. **114.** Dacă $f = (X - \alpha)g$ cu $\alpha \in \mathbb{Z}$ și $g \in \mathbb{Z}[X] \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \mid c$. Cum $(a + b)c = \text{impar} \Rightarrow a + b = \text{impar}$ și $c = \text{impar} \Rightarrow \alpha = \text{impar}$. Din egalitatea $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha(a\alpha + b)$ par $\Rightarrow a\alpha + b$ par $\Rightarrow a + b = \text{par}$, contradicție. **116.** Avem $2(a_0 + a_2 + \dots + a_{1986}) = f(1) + f(-1) = 3^{1986} + 1$. **117.** Se verifică prin calcul direct. **118.** a) Se determină mai întâi λ_n ; apoi din egalitatea $f - \lambda_n f_n = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}$ se determină λ_{n-1} și în final se determină λ_0 ; b) rezultă din a). **119.** Se înlocuiește X cu a_1 și obținem α_0 , apoi se înlocuiește X cu a_2 și se obține α_1 ; apoi se înlocuiește X cu a_3 și se obține α_2 ș.a.m.d. **120.** $a \geq 1$. **121.** $a \in (-\infty, -1)$. **123.** Dacă $f(x) = X^{n-1} + \dots + X + 1 = (X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_{n-1})$, avem: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i} = \frac{f'(1)}{f(1)}$.

124. Folosim problema 118 și vom lua în considerație polinoamele $f_k = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)}{k!}$, $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$. Cum $f(0), f(1), \dots, f(n)$ sunt numere întregi se obțin $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Dacă $m > n$ avem $f_k(m) = C_m^k \Rightarrow f(m) \in \mathbb{Z}$. Dacă $0 \leq m \leq n$ avem $f_k(m) = 0$ pentru $k > m$ și $f_k(m) = C_m^k$ pentru $k \leq m$. Deci $f(m) \in \mathbb{Z}$. Analog în cazul când $m < 0$ obținem $f_k(m) \in \mathbb{Z}$ și deci $f(m) \in \mathbb{Z}$.

Capitolul XIV PERMUTĂRI

2. a) $\sigma^{2k} = e, \sigma^{2k+1} = \sigma$; **b)** $\sigma^{2k} = e, \sigma^{2k+1} = \sigma$; **c)** $\sigma^{2k} = e, \sigma^{2k+1} = \sigma$; **d)** $\sigma^{4k} =$

$$= e, \sigma^{4k+1} = \sigma, \sigma^{4k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma^{4k+3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 3. x = e$$

(permutarea identică). 4. $\sigma^{123} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma^{210} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$

$$\sigma^{145} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 5. \sigma^{100} = e, \sigma^{151} = \sigma^{651} = \sigma; \quad 6. a) m(\sigma) = 2, \varepsilon(\sigma) =$$

$$= 1; b) m(\sigma) = 4, \varepsilon(\sigma) = 1; c) m(\sigma) = 4, \varepsilon(\sigma) = 1; d) m(\sigma) = 7, \varepsilon(\sigma) = -1;$$

$$e) m(\sigma) = 6, \varepsilon(\sigma) = 1; f) m(\sigma) = 9, \varepsilon(\sigma) = -1; g) m(\sigma) = 9, \varepsilon(\sigma) = -1. \quad 7. \text{Cum}$$

$$\varepsilon(x^2) = 1 \text{ și } \varepsilon(u) = -1 \text{ nu există nici o permutare. } \quad 8. \varepsilon(x^2) = 1, \varepsilon(u) = -1;$$

$$\text{nu există nici o permutare. } \quad 9. x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 10. x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad 11. i = 5, j = 2. \quad 12. i = 5, j = 6. \quad 13. m(\sigma) = n(n - 1) \text{ și}$$

$$\sigma \text{ este întotdeauna pară; } \quad 14. e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5. \quad 15. 4! (1 + 2 + 4 + 5 +$$

$$+ 6)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 4799952. \quad 16. \text{al } 112\text{-lea. } \quad 17. \text{Obținem}$$

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ numere distincte, suma lor este } \frac{4!}{2!} (1 + 2 + 4 + 5 + 5)(10^4 + 10^3 +$$

$$+ 10^2 + 10 + 1) = 2266644. \quad 18. \text{Fie } \sigma \in S_n \text{ pentru care } P_\sigma \text{ este maxim.}$$

$$\text{Fie } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ cu } i < j. \text{ Fie transpoziția } \tau_{ij} = (ij) \text{ și permutarea}$$

$$\tau = \tau \circ \tau_{ij}. \text{ Avem } P_\tau \leq P_\sigma. \text{ Cum } P_\tau = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n \left(a_k^r + \frac{1}{a_{\sigma(k)}^s} \right).$$

$$\cdot \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s} \right) \left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right) \text{ atunci, din } P_\tau \leq P_\sigma \text{ prin simplificare se obține}$$

$$\left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s} \right) \left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right) \leq \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right) \left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s} \right) \text{ de unde obținem}$$

$$(a_i^r - a_j^r)(a_{\sigma(j)}^s - a_{\sigma(i)}^s) \leq 0 \Rightarrow a_{\sigma(j)}^s > a_{\sigma(i)}^s \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j). \text{ Cum } i \text{ și } j \text{ au}$$

$$\text{fost arbitrar aleși, } \sigma = e \text{ (permutarea identică). } \quad 19. \text{ și } \quad 20. \text{ Același}$$

$$\text{raționament ca la problema 18. Se arată că: a) } \sigma = \text{permutarea identică;}$$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 21. a) Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

b) $\sigma =$ permutarea identică. 22. Vom dovedi că σ este permutarea identică. Prin absurd $\sigma \neq e \Rightarrow (\exists i); 1 \leq i \leq n, \sigma(i) = j$ cu $j \neq i$. Notăm $\sigma(j) = k \Rightarrow k \neq j$. Fie $k = i$; presupunem $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow a_i a_j < < a_j a_i$, contradicție. Analog în cazul $j < i$ obținem o contradicție. Deci $k \neq i \Rightarrow k \notin \{i, j\}$. Notăm $\sigma(k) = l$. Se observă că $l \neq j$ și $l \neq k$. Presupunem că $l = i$; dacă $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow i < k \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_i a_j < a_k a_i \Rightarrow a_i a_j < a_k a_i \Rightarrow j < k \Rightarrow a_j a_{\sigma(j)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_j a_k < a_k a_i \Rightarrow j < l \Rightarrow j < i$, contradicție. Analog dacă $j < i$ ne duce la o contradicție. Deci $l \neq i$ și deci $l \notin \{i, j, k\}$. Dacă notăm $m = \sigma(l)$, ca mai sus, se arată că $m \notin \{i, j, k, l\}$. Continuând procedeul obținem o infinitate de numere $\{i, j, k, l, m, \dots\}$, contradicție. 23. Sunt permutările de forma: a) există $1 \leq i, j \leq i+1$ astfel încât $\sigma(i) = i+1, \sigma(i+1) = i, \sigma(j) = j+2, \sigma(j+1) = j$ și $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; b) există un $1 \leq i \leq n$ astfel încât $\sigma(i) = i+1, \sigma(i+1) = i+2, \sigma(i+2) = i$ și $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; c) există $1 \leq i \leq n$ astfel încât $\sigma(i) = i+2, \sigma(i+1) = i, \sigma(i+2) = i+1$ și $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri. Numărul tuturor permutărilor cu două inversiuni este $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. 24. Orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziții (ij) , iar $(ij) = (1i)(1j)(1i)$. 25. Se aplică același procedeu ca la problema 18.

Capitolul XV MATRICE

1. $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 12 & 10 \\ 4 & 16 & 11 \end{pmatrix}$. 2. $f(A) + f(B) = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$; $f(A + B) = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. 3. $A^n = a^n I_2$, dacă $n = 4k$; $A^n = a^n A$, dacă $n = 4k + 1$; $A^n =$

$$= -a^n I_2 \text{ dacă } n = 4k + 2; A^n = -a^n A, \text{ dacă } n = 4k + 3. \text{ 4. } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^n = 0, \text{ dacă } n \geq 3. \text{ 5. } \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ a^{n-1}c + (n-1)a^{n-2} & a^{n-1}b & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{6. } \begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 7. } A^n = A, \text{ dacă } n \text{ este impar și } A^n =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-2x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dacă } n \text{ este par. 8. } A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{9. } A^n = (-a)^n \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}. \text{ 10. } A^n =$$

$$= a^n \begin{pmatrix} 1 & n & n\frac{b}{a} + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 11. } \sum_{k=1}^n A^k = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}(a^n - 1) & 0 \\ 0 & \frac{b}{b-1}(b^n - 1) \end{pmatrix}.$$

$$\text{12. } \sum_{k=1}^n A^k = \begin{pmatrix} x \frac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x \frac{1-(2x)^n}{1-2x} \\ 0 & y \frac{1-y^n}{1-y} & 0 \\ x \frac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x \frac{1-(2x)^n}{1-2x} \end{pmatrix}. \text{ 13. } x = 2, y = 3, \text{ sau } x =$$

$$= 2, y = -3. \text{ 14. } u = 5, v = a, a \in \mathbb{C}. \text{ 15. } A^n = (2a)^{n-1}A, \text{ deci } (2a)^{n-1} = 1, \\ a = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2. \text{ 16.}$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \pm \frac{i \pm 1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}; A = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{sau } A = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ sau } A = \pm \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$A = \pm \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ sau } A = \pm \frac{i \pm 1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

18. Luăm $b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$ și, din ipoteză, rezultă $m - l = 2ar + r^2$, $p - m = 2ar + 3r^2$, $p - q = 2ar + 5r^2$ și se observă că $2(p - m) =$

$$= m - l + p - q. 19. \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}. 20. X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$21. a = -1. 22. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Fie L_1, L_2, L_3, L_4 liniile matricei căutate $L_1 = (0, 6, 0)$, sau $L_1 = (1, 1, 0)$; $L_2 = (1, 0, 1)$ sau $L_2 = (0, 12, 0)$ sau $L_2 = (2, 2, 0)$; $L_3 = (0, 0, 1)$ sau $L_3 =$

$= (1, 2, 0)$; $L_4 = (0, 1, 1)$ sau $L_4 = (1, 3, 0)$. 24. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avem

$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$. Se deduce că $bc = -(a^2 + a + 1)$ și deci

$b \neq 0$ și $c \neq 0$. Matricea A este de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2 + a + 1}{b} & -a - 1 \end{pmatrix}$ cu $a, b \in$

$\in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $A^{-1} = -(A + I_2)$. 27. Relațiile se verifică prin calcul direct.

28. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Dacă $D = [A, B] = AB - BA$ și

punem $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, atunci $\alpha = bc' - b'c$, $\delta = b'c - bc'$ și deci $\alpha + \delta = 0$.

Cum D verifică egalitatea $D^2 - (\alpha + \delta) + (\alpha\delta - \beta\gamma)I_2 = 0 \Rightarrow D^2 = (\beta\gamma - \alpha\delta)I_2 \Rightarrow [[A, B]^2, C] = [D^2, C] = [(\beta\gamma - \alpha\delta)I_2, C] = (\beta\gamma - \alpha\delta)C - (\beta\gamma - \alpha\delta)C = 0$. **29.** Notăm E_{ij} matricea de ordinul n care are la intersecția liniei i cu coloana j elementul 1 și în rest zero. Cum $AE_{ij} = E_{ij}A$, oricare $i, j = 1, 2, \dots, n$, rezultă ușor că A este o matrice de forma $a \cdot I_n$. **30.** $\text{card } M = 2^{(m-1)(n-1)}$. **31.** Avem matricele $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$. Deci este suficient să verificăm egalitatea când A_1, A_2, A_3, A_4 sunt matricele $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. **32.** 3) $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ atunci $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} \right)$ și $\text{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ij}a_{ij} \right)$ și deci $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$; 4) rezultă din 3).

Capitolul XVI DETERMINANȚI

1. a) minus; b) minus; c) minus; d) plus. **2.** $i = 3, j = 5$. **3.** Nici unul. **4.** Coeficientul lui x^4 este -6, coeficientul lui x^3 este 1. **5.** $\det A = \sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$. **6.** $\det A = \sum_{\alpha \in S_5} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{5\sigma(5)}$. Fiecare termen conține un factor care este egal cu zero, deci $\det A = 0$. **7.** a) Adunând toate liniile la linia întâi, se obțin la linia întâi numai elementele zero și deci determinantul este nul. b) Dăm factor comun pe a după prima coloană și b după coloana a doua. **8.** a) Cel puțin 2 linii au toate elementele egale cu același număr și deci determinantul este egal cu zero; b) de exemplu, determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \neq 0 \text{ și are } n^2 - n + 1 \text{ elemente egale. 9. Determinan-}$$

mul are o linie (coloană) nulă și deci este nul. 10. Se obține ecuația $(x - 1)(4x^2 + 4x + 5\alpha - 4\alpha^2) = 0$ care are 3 rădăcini reale. 11. $-\cos^3 2x$. 12. Se obține ecuația $x^3 - 4x^2 - 2x + 5 = 0$ care are o rădăcină $x = 1$. 13. Determinantul din membrul stâng se poate scrie ca suma a doi determinanți. 14. Avem $\sqrt{1 + \cos x} = 2 \cos \frac{x}{2}$, $\sqrt{1 + \sin x} = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$,

$$\sqrt{1 - \sin x} = -\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}, \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Adunăm la coloana a}$$

treia coloana a doua, dăm factor comun pe $2\sqrt{2}$; la coloana a doua adunăm coloana întâi înmulțită cu (-1) , rezultă că, coloana a doua este egală cu coloana a treia și deci determinantul este nul. 15. $-4(a - b)(b - c)(c - a)$. 16. Linia $(n - 1) - a$ se scade din linia $n - a$; linia $(n - 2) - a$ se scade din linia $(n - 1) - a$; linia întâi se scade din linia a doua. Se dezvoltă după linia întâi. 17. Se înmulțește coloana 2 cu 10, coloana 3 cu 10^2 ș.a.m.d. coloana n cu 10^{n-1} și se adună toate elementele la coloana 1. 18. Rădăcinile sunt $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$. 19. Se scade linia p din linia $p + 1$, linia $p - 1$ din linia p ș.a.m.d., linia 1 din linia 2 și se dezvoltă după coloana 1; se obține un determinant de aceeași formă cu cel inițial în care p se înlocuiește cu $p - 1$ (aici se folosește identitatea $C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$). 20. Se adună liniile 2, 3, ..., n la prima linie și se ține

cont că $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. 21. Dezvoltând după ultima linie avem relația de recurență $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$. 22. Se poate folosi relația de recurență de la problema precedentă. 24. $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. 25. $AB = I_n \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow A, B$ inversabile și B inversa lui $A \Rightarrow BA = I_n$. 27. Rezultă imediat din formula Binet-Cauchy.

$$28. \text{ Dacă } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ și } B = {}^tA \text{ (transpusa), atunci } A'A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

unde $c_{11} = a_1^2 + \dots + a_n^2$, $c_{22} = b_1^2 + \dots + b_n^2$, $c_{12} = c_{21} = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$. Se aplică apoi formula Binet-Cauchy. 29. Se aplică formula Binet-

Cauchy. 30. Se punește de la definiția determinantului

$$\det B = \sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\sigma) \bar{a}_{1\sigma(1)} \bar{a}_{2\sigma(2)} \dots \bar{a}_{n\sigma(n)} =$$

$$= \det A = \sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det A}$$

31. $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB) \det(A - iB) =$

$= d \cdot \bar{d} \geq 0$, unde $d = \det(A + iB)$. 32. I) Se verifică prin calcul; II) $A^k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$. Din egalitatea I), $A^2 = (a + d)A \Rightarrow A^k = (a +$

$+ d)^{k-1} A$. Dacă $A \neq 0 \Rightarrow (a + d)^{k-1} = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. Dacă $A =$

$= 0 \Rightarrow A^2 = 0$. 34. Dacă \bar{A} (respectiv \bar{B}) este matricea pătratică de tip

(m, n) care se obține din A (respectiv B) prin adăugarea a $m - n$ coloane

(respectiv linii) care au toate elementele egale cu 0, avem $AB = \overline{AB}$.

Atunci $\det(AB) = \det(\overline{AB}) = \det(\bar{A}) \det(\bar{B}) = 0$. 35. Fie $E = A_1 \cup A_2 \cup$

$\cup \dots \cup A_n$ și $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Considerăm matricea $B \in M(n, p, \mathbb{R})$,

$B = (b_{ij})$ cu $1 \leq i \leq n$ și $1 \leq j \leq p$ unde $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } e_j \in A_i \\ 0 & \text{dacă } e_j \notin A_i \end{cases}$. Se arată că

$A = B'B$ și se aplică problemele 29 și 34. 36. $\det N = k$. 37. $\det A = n(-$

$-1)^{n-1}$. 38. $\det A = 1$. 39. $\det A = (-1)^{n-1} 2^{n-2}(n-1)$. 40. a) Paritatea

rezultă din faptul că toți termenii determinantului sunt numerele 1 și -1

și ei eventual se reduc doi câte doi; b) Valoarea maximă este 4, de

exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Valoarea minimă este -4.

41. Valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$ este 2, de exemplu pen-

tru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 42. Adunând prima linie la toate celelalte

linii obținem o matrice care are pe liniile de rang: 2, 3, ..., n elementele

0, 2, sau -2. 43. Se aplică problema 40 și cea precedentă. Se găsește că

valoarea maximă este 16, iar cea minimă -16.

Capitolul XVII

RĂNGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE.

1. a) 3; b) 4; c) 4; d) 4. 2. a) Pentru $\alpha = -3$ sau $\alpha = 3$ rangul este 3, iar dacă $\alpha \neq -3$ și $\alpha \neq 3$ rangul este 4; b) 4; c) Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\beta = 1$ rangul

este 2, iar în rest rangul este 3; d) Pentru $\beta = 1$ sau $\beta = 5$ și $\alpha = 0$, rangul este 2, iar în rest rangul este 3. 3. a) Rangul matricei ori nu se schimbă, ori se schimbă cu o unitate; b) Rangul matricei se schimbă cu cel mult o unitate. c) Rangul matricei se schimbă cu cel mult k . 4. Dacă $a \neq 0$, $A^* = aA^{-1}$.

Dacă $a = 0$, pentru $n > 2$ toți membrii egalităților sunt nuli. 5. $AA' = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$; $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} A'.$$

6. a) Pentru $\alpha \neq -8$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\frac{1}{\alpha + 8} \begin{pmatrix} 2\alpha + 4 & 6 & 4 - \alpha \\ -6 & 3 & 6 \\ 4 - \alpha & -6 & 2\alpha - 4 \end{pmatrix}$; b) Pentru $\alpha \neq 0$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\frac{1}{8\alpha} \begin{pmatrix} 3\alpha & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; c) Nu; d) Da. In-

versa este $\begin{pmatrix} 0 & i & -i & i \\ -i & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & i \\ i & i & -i & 0 \end{pmatrix}$. 7. a) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i ($1 \leq i \leq n$),

matricea este inversabilă, inversa fiind $\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$; b) Dacă

$\alpha_i \neq 0$, pentru orice i , matricea este inversabilă, inversa sa fiind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_n} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha_{n+1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) Da. Inversa este } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

d) Da. Inversa este:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\alpha^{n-1} & (-1)^{n-2}\alpha^{n-2} & (-1)^{n-3}\alpha^{n-3} & (-1)^{n-4}\alpha^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Avem $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = I - A^k = I$. 10. Avem $I = I' = (AA^{-1})' = A'(A^{-1})'$. 11. Nu, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Dacă A este nesingulară, atunci $AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow B = C$.

12. Coloanele matricei AB sunt combinații liniare de coloanele matricei A , iar liniile matricei AB sunt combinații liniare de liniile matricei B . În continuare se aplică Kronecker de caracterizare a rangului unei matrice.

13. a) $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = I_n$; b) $\left[\frac{1}{2}(A + I_n)\right]^2 =$

$= \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n)$. 14. b) Avem $(I_n - E_n) \left(I_n - \frac{1}{n-1}E_n\right) =$

$= I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{1}{n-1}E_n^2 = I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{n}{n-1}E_n = I_n$.

15. a) Rezultă direct din proporționalitatea oricăror linii ale unei matrice

de rang 1. b) $A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$. 16. Fie $A = XY$ ca la

exercițiul precedent, componentele lui X fiind x_1, x_2, \dots, x_n , iar ale lui Y fiind y_1, y_2, \dots, y_n . Atunci $\alpha = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. b)

$$(I_n + A) \left(I_n - \frac{1}{\alpha + 1} A \right) = \left(I_n - \frac{1}{\alpha + 1} A \right) (I_n + A) = I_n + A - \frac{1}{\alpha + 1} A^2 = I_n.$$

În particular, pentru $A = -E_n$ din problema 13, obținem $A^2 = -nA$, deci

$$(I - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} E_n. \quad 17. A^{-1}B \text{ are rangul } 1 \text{ și după problema 16 re-}$$

zultă că $(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha + 1} A^{-1}B$, unde $\alpha = YA^{-1}X$. Înmulțind cu A^{-1}

la dreapta relația de mai înainte, se obține $(I_n + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha + 1}$

$A^{-1}B A^{-1}$. Dacă efectuăm calculele în ordinea următoare: $A^{-1}X \rightarrow Y A^{-1} \rightarrow$

$$\alpha = Y(A^{-1}X) \rightarrow \frac{1}{\alpha + 1} \rightarrow \frac{1}{\alpha + 1} A^{-1}X \rightarrow \frac{1}{\alpha + 1} A^{-1}B A^{-1} =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha + 1} A^{-1}X \right) (YA^{-1}) \rightarrow (A + B)^{-1}, \text{ sunt necesare } 3n^2 + 2n + 1 \text{ înmulțiri și}$$

împărțiri. 18. Dacă a_{ji}^* este elementul matricei A^{-1} de pe locul (j, i) , c_i

coloana a i -a, iar l_j linia a j -a a matricei A^{-1} , atunci se arată că $\overline{A^{-1}} = A^{-1} -$

$$- \frac{\alpha}{1 + \alpha a_{ji}^*} c_i l_j. \quad 19. \text{ Fie } A \text{ de ordin } n \text{ și } e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}). \text{ Punem } f = A^{-1} e \text{ și}$$

$g = e' A^{-1}$. Atunci avem $\overline{A^{-1}} = A^{-1} - \frac{a}{1 + as} fg$ cu $1 + as \neq 0$, unde s este

suma elementelor matricei A^{-1} . 20. a) $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\text{c) } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \text{ d) } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}; \text{ e) Nu are soluții; f) } X = (1 \ 1 \ 1);$$

g) $X = (-3 \ 11i \ 3+9i \ -1+7i)$; h) Rezultă:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -(n-2) & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & & -1 \\ 1 & 1 & 2 & & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & & n-1 \end{pmatrix} \quad \text{și}$$

folosind faptul că $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ (problema 10) determinăm și inversa

matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Se obține în final $X = I_n - \frac{n-1}{n^2}$.

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Capitolul XVIII

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. a) $x_1 = 0, x_2 = \frac{91\alpha}{19}, x_3 = \frac{-39\alpha}{19}$; b) $x_1 = \alpha, x_2 = 2\alpha, x_3 = 3\alpha, x_4 = 5\alpha$. 2. a) Sistemul are soluții nenule pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $\lambda \neq 0$ și $\lambda \neq -1$, $x = -\alpha, y = z = 0, t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. Dacă $\lambda = 0$, $x = \beta, y = -(\beta + \gamma), z = 0, t = \gamma$; β, γ fiind numere oarecare. Dacă $\lambda = -1$, $x = u, y = 0, z = -(u + v), t = v, u, v$ fiind numere oarecare; b) Pentru $\lambda \neq 1$ și $\lambda \neq -2$, sistemul are soluții nenule. Pentru $\lambda = 1$, $x = -(\alpha + \beta), y = \alpha, z = \beta$; α, β fiind numere oarecare. Pentru $\lambda = -2$, $x = y = z = \gamma, \gamma$ fiind un număr oarecare; c) Sistemul are soluții nenule dacă $\lambda = \frac{2}{3}$. În

acest caz, $x = 34\alpha, y = -18\alpha, z = 40\alpha, t = \alpha$; α fiind un număr oarecare.

3. a) Sistemul este incompatibil; b) Sistemul este compatibil, soluțiile

sale sunt: $x = \frac{5\alpha}{8}$, $y = \frac{4-\alpha}{2}$, $z = \frac{8-\alpha}{8}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$; c) Sistemul este compatibil nedeterminat: $x_1 = -2\lambda$, $y = \lambda + 1$, $z = \lambda$, λ fiind un număr oarecare; d) Sistemul este compatibil nedeterminat: $x = -\lambda + \frac{\mu}{2} + 1$, $y = \lambda$, $z = 9 - \frac{3}{2}\mu$, $t = \mu$, unde λ și μ sunt numere oarecare. 4. Sistemul este compatibil $\Leftrightarrow 2a^2b^2 - 3a^2b + a^2 - b + 2 = 0$. 5. a) Dacă $\alpha \neq 1$ și $\beta \neq 0$, sistemul are soluție unică $x_1 = \frac{2\beta-1}{\beta(\alpha-1)}$, $x_2 = \frac{1}{\beta}$, $x_3 = \frac{2\alpha\beta-4\beta+1}{\beta(\alpha-1)}$. Dacă $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, sistemul este compatibil, soluția fiind $x_1 = 2 - \lambda$, $x_2 = 2$, $x_3 = \lambda$, λ fiind număr arbitrar. Dacă $\alpha = 1$, $\beta \neq \frac{1}{2}$ sistemul este incompatibil. Dacă $\beta = 0$ sistemul este incompatibil; b) Dacă $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 1$ și $\alpha \neq -2$; sistemul are soluție unică; $x_1 = \frac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$, $x_2 = \frac{\alpha\beta+\beta-2}{\beta(\alpha-1)(\alpha+2)}$, $x_3 = \frac{\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$. Dacă $\alpha = \beta = 1$, sistemul este compatibil: $x_1 = 1 - \lambda - \mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$ fiind numere arbitrare. Dacă $\alpha = \beta = -2$, sistemul este compatibil. $x_1 = \gamma$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1+\gamma)$, $x_3 = \gamma$ fiind un număr arbitrar. În rest, sistemul este incompatibil; d) Dacă $\alpha \neq 1$ și $\alpha \neq -22$, sistemul are soluția unică: $x_1 = \frac{-7\beta}{\alpha+22}$, $x_2 = \frac{(\alpha+8)\beta}{\alpha+22}$, $x_3 = \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha+22}$, $x_4 = \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha+22}$. Dacă $\alpha = 1$, sistemul este compatibil, soluția fiind: $x_1 = \beta - 2u - 3v - 3w$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_4 = w$, unde u, v, w sunt numere arbitrare. Dacă $\alpha = -22$ și $\beta \neq 0$ sistemul este incompatibil, iar dacă $\alpha = -22$ și $\beta = 0$ sistemul este compatibil. 6. În ambele cazuri o condiție necesară și suficientă este ca sistemul să fie omogen. 7. O condiție necesară și suficientă este ca suma coeficienților combinației liniare date

să fie egală cu 1. 8. a) $\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$; b)

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}. \quad 9. \text{ Condiții analoage celor din pro-}$$

blema precedentă. 10. Cel puțin două dintre numerele a, b, c, d, e sunt

egale cu -1; dacă nici unul nu este egal cu -1, atunci $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} +$

$+\frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1} = 1$. 11. $\alpha = be + cf + ad = 0$. 12. a) Dacă $m \neq 1$,

$m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sistemul are soluție unică: $x = \frac{(4m-3)(2m-1)}{2(m-1)(m^2+m-1)}$,

$y = \frac{4m-3}{2(m^2+m-1)}$, $z = \frac{6m^2-12m+5}{2(m-1)(m^2+m-1)}$; b) $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{3} \right] \cup$

$\cup [1, +\infty)$. 13. Avem $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x = 0$. Se observă că ecuația

$(\lambda I_n - A)x = 0$ are soluții nenule $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ este rădăcină a

polinomului $P(x)$. 14. a) $\lambda_1 = -ai$, $\lambda_2 = ai$. Vectorii proprii pentru $\lambda_1 = -ai$

sunt de forma $(\alpha, i\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda_2 = ai$ nu are vectori proprii. b) $\lambda_1 =$

$= \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sunt: $(-7\alpha + 6\beta; 5\alpha - 3\beta;$

$-6\alpha + 3\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Pentru $\lambda = 6$, vectorii proprii sunt $(\alpha;$

$\alpha; -3\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$; c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$

sunt de forma $(0; \alpha; -\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda = 6$ sunt de forma $(3\alpha; 4\alpha; -2\alpha)^t$,

$\alpha \neq 0$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 0$ sunt de

forma $(2\alpha + 3\beta; -\alpha; 0; -\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Vectorii proprii pentru

$\lambda = 2$ sunt de forma $(\alpha; -\alpha; \beta; \alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$; e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =$

$= \lambda_4 = 3$. Vectorii proprii sunt de forma $(\alpha; 0; \beta; -\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq$

$\neq 0$. 15. $P_A(X) = \det(XI_n - A) = (-1)^n \det(A - XI_n) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Fie

$f(X) = a_0 \prod_{i=1}^k (X - x_i)$ unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt rădăcinile polinomului.

Rezultă $f(A) = a_0 \prod_{i=1}^k (A - x_i I_n)$ și deci $\det(f(A)) = a_0 (-1)^{nk} \prod_{j=1}^n f(x_j) =$

$= (-1)^k a_0^n \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n (x_j - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n f(\lambda_i)$. 16. a) Avem $P_A(X) = (-1)^n \det(A -$

$XI_n)$, iar $P_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \det(A^{-1} - XI_n)$. Dacă λ este o valoare proprie a lui A și cum A este inversabilă rezultă imediat că $\lambda \neq 0$. Mai mult, se arată că rădăcinile lui $P_{A^{-1}}(X)$ sunt inversele rădăcinilor polinomului

$P_A(X)$; b) Fie $P_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, atunci $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ și $P_A(-\lambda) =$

$= (-1)^n \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$. De aici rezultă $P_A(\lambda)P_A(-\lambda) =$

$= (-1)^n \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - \lambda_i^2)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$. Dar $A^2 - \lambda^2 I_n = (A - \lambda I_n)(A +$

$+\lambda I_n)$ și deci $P_{A^2}(\lambda^2) = (-1)^n P_A(\lambda)P_A(-\lambda)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$. Așa-

dar, $P_{A^2}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - \lambda_i^2)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$, de unde $P_{A^2}(X) =$

$= \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^2)$. Deci valorile proprii ale matricei A^2 sunt $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$;

c) Analog cu raționamentul de la punctul precedent. Se folosește

identitatea $A^k - \lambda^k I_n = \prod_{i=1}^k (A - X \varepsilon_i I_n)$, unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ sunt rădăcinile

de ordinul k ale unității. Rezultă că valorile proprii ale lui A^k sunt $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$; d) Fie $f(X) = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} + \dots + a_{k-1} X + a_k$. Se poate

aplica exercițiul 15; rezultă că valorile proprii ale lui $f(A)$ sunt $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A . 17. c) Fie x

vectorul propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ . Se arată ușor că, dacă $f(X) = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} + \dots + a_{k-1} X + a_k$, avem $f(A)x = f(\lambda)x$, adică este vector propriu al matricei $f(A)$ care corespunde valorii proprii $f(\lambda)$.

Capitolul XIX

LEGI DE COMPOZIȚIE. GRUPURI

1. Elementul neutru $e = 0$. Elementele $x \neq 1$ sunt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x}{x-1}$. 2. Elementul neutru $e = -1$. Elementele $x \neq 1$ sunt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x+3}{x-1}$. 3. a) Nu este comutativă, nu este asociativă, nu are element neutru; b) $a_2 = 3a$; $a_3 = 7a$. În continuare se arată prin inducție. 4. a) Este comutativă, asociativă, elementul neutru este zero, 0 este singurul element simetrizabil; b) se arată prin calcul; c) $x = \sqrt{5}$. 5. Este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru, orice element este simetrizabil. 6. Se observă că $x \top y = \max \{x, y\}$. \top este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru; 0 este singurul element simetrizabil. 7. Se arată mai întâi că $x, y \in A \Rightarrow x \circ y \in A$. I) Se arată prin calcul; II) $\frac{x+y}{1+\frac{xz}{a^2}} = \frac{y+z}{1+\frac{yz}{a^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-y) \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) = 0. \text{ Cum } z \neq 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y. \text{ 8. a)}$$

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

b) Nu este comutativă, nu este asociativă (de exemplu $(4 * 2) * 3 \neq 4 * (2 * 3)$; nu are element neutru. 9. a) $ax = b \Rightarrow$ are soluția $x = ab$; dacă $ax = ay = b \Rightarrow ab = x$ și $ab = y \Rightarrow x = y$; b) Fie $a \in A$ și $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Funcția $\sigma_a : A \rightarrow A$, $\sigma_a(x) = ax$ este bijectivă și $\sigma_a(a) = a$. În plus, dacă $\sigma_a(v) = x$. Din ipoteză rezultă că $x \neq a \Rightarrow \sigma_a(x) \neq x$. Mulțimea $A - \{a\}$ se împarte în perechi disjuncte $\Rightarrow A - \{a\}$ are un număr par de elemente $\Rightarrow A$ are un număr impar de elemente. 10. „ $*$ ” este comutativă și asociativă $\Leftrightarrow a = b = 0$ și $c \in \mathbb{R}$ sau $a = b = 1$ și $c \in \mathbb{R}$. 11. a) $x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow axz + cz + a^2x + ac + bz = bxz + cx + ax + b^2z + bc \Leftrightarrow a = b, b + c = b^2, c + a = a^2. ac = bc \Leftrightarrow a = b = \lambda, c = \lambda^2 - \lambda, \text{ cu } \lambda \in$

$\in \mathbf{R}$; b) Dacă $e \in \mathbf{R}$ este element neutru $\Rightarrow xe + ax + be + c = x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ și $ex + ae + bx + c = x \Rightarrow a = 1 - e$, $b = 1 - e$ și $c = e(e - 1)$. Dacă notăm $\lambda = 1 - e \Rightarrow a = b = \lambda$ și $c = \lambda^2 - \lambda \Rightarrow$ legea este asociativă. Invers dacă legea este asociativă, din a) rezultă că elementul neutru $e = 1 - \lambda$;

c) Dacă $e \in \mathbf{R}$ este element neutru, atunci $e - 1$ nu este simetrizabil.

12. \top și \perp sunt comutative, asociative și au element neutru (0, respectiv 1).

Pentru a arăta ultimele 2 egalități se scrie: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$,

$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$, $c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$, unde $p_i (1 \leq i \leq r)$ sunt numere prime și

$\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$. În continuare se ține cont că $m \perp n = \prod_{i=1}^r p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ și

$m \top n = \prod_{i=1}^r p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$. **13.** \top și \perp sunt comutative și asociative, nu au

element neutru. **14.** a) Legea $*$ este comutativă și asociativă, 0 este element neutru; fiecare $x \in \mathbf{R}$ are simetricul $-x$. Legea \circ este comutativă, asociativă -1 este element neutru, orice element este simetrizabil (simetricul lui x este $x' = -x - 2$); b) Soluțiile sistemului sunt (0, -1), (-1, 0).

16. Sunt n^{n^2} legi de compoziție dintre care $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sunt comutative și $n^{(n-1)^2+1}$ au element neutru. **17.** În (C^*, \top) elementul neutru este -i, dacă

$z \in C^* \Rightarrow -\frac{1}{z}$ este inversul lui z . **18.** Se arată că $x \neq 1$ și $y \neq 1 \Rightarrow x * y \neq$

$\neq 1$. Se arată prin calcul că $*$ este asociativă, comutativă. Elementul neutru este -1. Dacă $x \in R_1$, $x' = \frac{2+x}{x-1}$ este inversul lui x (Se vede că

$x' \in R_1$). **19.** Operația „ \circ ” este comutativă, asociativă, 0 este element

neutru. Dacă $z \in C_1 \Rightarrow z' = \frac{z}{1-z}$ este inversul său. Se vede că $z' \in C_1$,

$i \circ i \circ i \circ i \circ i = 5 - 4i$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i = -(7 + 8i)$. **20.** Legea \perp

este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru. Dacă $x \in A \Rightarrow x' =$

$= e^{\frac{1}{\ln x}}$ este inversul lui x . Se observă că $x' \in A$. **21.** Legea \circ este

comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru. Dacă $x \in R_1 \Rightarrow x' =$

$= \frac{x}{1-x}$ este inversul lui x . Se vede că $x' \in R_1$. **22.** Legea $*$ este

comutativă, asociativă, 1 este elementul neutru. Dacă $x \in R_2 \Rightarrow x' =$

$= \frac{3-2x}{2-x}$ este inversul lui x . Se verifică că $x' \in R_2$. **23.** Legea \circ este

comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru. Dacă $x \in Q_2 \Rightarrow x' =$

$= \frac{2x}{x-2}$ este inversul lui x . Se verifică: $x' \in Q_2$. **25.** Fie $x, y \in H \Rightarrow x =$

$= a + b\sqrt{2}$, $y = d + c\sqrt{2}$. Dacă H este parte stabilă atunci $xy \in H$. Cum

$xy = (ad + 2bc) + (ac + bd)\sqrt{2} \Rightarrow (ad + 2bc)^2 - k(ac + bd)^2 = 1$. Cum

$a^2 - kb^2 = 1$ și $c^2 - kd^2 = 1 \Rightarrow k = 2$. **27.** Elementul neutru este matricea

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversul elementului $\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -2y & x-4y \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} x-4y & -2y \\ 2y & x+4y \end{pmatrix}$

28. Se verifică prin calcul că produsul a 2 elemente din G se găsește în

G . operația din G este asociativă deoarece înmulțirea matricelor este

asociativă. Fiecare element din G este inversabil. **29.** Considerăm grupul

G din exercițiul 28. Dacă $A \in G$, se arată prin calcul: A^2 este matricea

unitate $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau matricea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(\forall) A \in G$. Deci, dacă $A, B \in$

$\in G \Rightarrow A^2 B^2 = B^2 A^2$. Deci există grupuri necomutative având propieta-

tea $x^2 y^2 = y^2 x^2$. **30.** Din $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow ab = ba^{-1} \Rightarrow a^2 b^2 = aba^{-1}b$. Ținând

cont că $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow a^{-1}b = b^{-1}a^{-1} \Rightarrow a^2 b^2 = abb^{-1}a^{-1} = e$. Din $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow ba = ab^{-1} \Rightarrow b^2 a^2 = bab^{-1}a$. Cum $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = a^{-1}b^{-1}$ și deci $b^2 a^2 =$

$= ba, a^{-1}b^{-1} = e$. Cum $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow b = a^{-1}b^{-1}a = b^{-1}ab b^{-1}a = b^{-1}a^2 \Rightarrow b^2 = a^2$.

Din $a^2 b^2 = e$ și $a^2 = b^2 \Rightarrow a^4 = b^4 = e$. **31.** $(ab)^2 = a^2 b^2 \Rightarrow abab = a(ab)a \Rightarrow$

$\Rightarrow ba = ab$. Există grupuri necomutative cu proprietatea $(a * b)^3 = a^3 * b^3$ (a

se vedea problema 39, cap. XX). **32.** a) Operațiile \top și \perp sunt

comutative, asociative, au element neutru: $(0, 1)$ este element neutru

pentru prima, și $(1, 0)$ pentru a doua; b) Elementele simetrizabile față de

legea „ \top ” sunt de forma (a, b) cu $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{Q} - \{0\}$; elementele

simetrizabile față de legea \perp sunt de forma (a, b) cu $a \in \{-1, 1\}$ și $b \in$

$\in \mathbb{Q}$; c) Legea \perp nu este distributivă față de \top . **33.** Legea $*$ este

comutativă, asociativă dar nu are element neutru. **36.** Funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow M$,

$f(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un izomorfism. **37.** Avem $S_3 = \{e, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_1, \sigma_2\}$

unde e este permutarea identică; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ sunt transpozițiile: (12) ,

(13), (23), iar $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Definim funcția:

$$f: S_3 \rightarrow G \text{ în felul următor: } f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(\tau_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(\tau_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(\tau_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Se arată că } f \text{ este un izomorfism de grupuri. 38. a) Se}$$

arată că $A^{5k} = I_5$, $A^{5k+1} = A$, $A^{5k+2} = A^2$, $A^{5k+3} = A^3$, $A^{5k+4} = A^4$ (\forall) $k \in \mathbb{N}$;

b) Inversa lui A este A^4 ; c) Se definește $f: G \rightarrow H$; $f(A^k) = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ (\forall) k , $1 \leq k \leq 5$; f este un izomorfism de grupuri.

39. În grupul $(\mathbb{R}, *)$, 0 este element neutru, inversul lui x față de operația

$*$ este $-x$. 40. Definim $f: G_1 \rightarrow G_2$ astfel: $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$, $f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = i$,

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -i$ este un izomorfism de grupuri. Definim

$g: G_2 \rightarrow G_3$, astfel; $g(1) = \text{permutarea identică}$, $g(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$g(i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; g este un izomorfism de

grupuri. 44. Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$.

Dacă notăm $f(1) = a \in \mathbb{Q}$, atunci rezultă că $f(n) = na$, (\forall) $n \in \mathbb{Z}$. Deci

$\mathbb{Q} = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Cum $f(1) \neq 0 \Rightarrow a = \frac{p}{q}$ cu $p \neq 0$ și $(p, q) = 1$. Putem

presupune $q > 0$. Atunci $\frac{1}{q+1} = ma = m \frac{p}{q} \Rightarrow q = (q+1)mp \Rightarrow q+1 \mid q$,

contradicție. 45. Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$.

Fie $\sqrt{2}, 1 \in \mathbf{R}$. Există $a, b \in \mathbf{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} = f(a)$ și $1 = f(b)$. Cum $a \neq 0$ și $b \neq 0$ există $m, n \in \mathbf{Z}$, nenule astfel încât $ma = nb$. Atunci $f(ma) = f(nb) \Rightarrow mf(a) = nf(b) \Rightarrow m\sqrt{2} = n \cdot 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{m} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$,

contradicție. 46. Presupunem că există un izomorfism $f: \mathbf{Q}^* \rightarrow \mathbf{R}^*$. Fie $f(2) = a, a \neq 0$. Există $b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ cu $b^3 = a$. Cum f este surjectivă, există $x \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $b = f(x) \Rightarrow b^3 = f(x^3) \Rightarrow f(x^3) = f(2) \Rightarrow x^3 = 2$.

Deci $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}$, contradicție. 47. Dacă G este grup, ecuațiile $ax = b$ și $ya = b$ au soluțiile $x = a^{-1}b$, respectiv $y = ba^{-1}$. Invers, cum ecuațiile $ax = a$ și $xa = a$ au soluții \Rightarrow există element neutru e . Ecuațiile $ax = e$ și $ya = e$ având soluții \Rightarrow există invers pentru orice $a \in G$. 49. și 50. Se verifică prin calcul. 51. b) Fie $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ un izomorfism de grupuri. Notăm $f(1) = n_0$. Se arată că $f = \varphi_{n_0}$. c) Cele două izomorfisme sunt:

$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x (\forall) x \in \mathbf{Z}$ și $g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, g(x) = -x, (\forall) x \in \mathbf{Z}$. 52. Dacă $f: \mathbf{Z} \rightarrow G$ este un omomorfism și punem $f(1) = g$, atunci $f(n) = ng = \underbrace{g + g + g \dots + g}_{n \text{ ori}}$. Deci f este perfect determinat de valoarea $f(1)$. Rezultă

de aici că φ este o bijecție. 53. a) Se verifică prin calcul; b) Fie $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ un omomorfism de grupuri. Notăm $q = f(1)$. Dacă $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(n) = nq$. Dacă $x = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow m = nx \Rightarrow f(m) = f(nx) \Rightarrow nq = nf(x) \Rightarrow f(n) =$

$= \frac{m}{n} q \Rightarrow f(n) = xq \Rightarrow f = \psi_q$. 54. Fie $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfism de

grupuri, nenul. Există $x \in \mathbf{Q}$ astfel încât $f(x) = a \in \mathbf{Z}, a \neq 0$. Fie $n \geq 0$ un număr natural; există $y \in \mathbf{Q}$ astfel încât $ny = x \Rightarrow f(ny) = f(x) \Rightarrow nf(y) = f(x) = a \Rightarrow n \mid a$. Cum n este arbitrar $\Rightarrow a = 0$, contradicție. 55. Fie

$f: \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfism și $x = \hat{k} \in \mathbf{Z}_n$. Cum $nx = \hat{nk} = \hat{0} \Rightarrow f(nx) = f(\hat{0}) = 0 \Rightarrow nf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$. 56. a) $mf(\hat{1}) = f(m\hat{1}) =$

$= f(\hat{m}) = f(\hat{0}) = \bar{0}$; b) Fie $f, g \in A$ astfel încât $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow f(\hat{1}) =$

$= g(\hat{1})$. Dacă $x = \hat{a} \in \mathbf{Z}_m$ este un element oarecare cu $0 \leq a \leq m - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = a \cdot \hat{1} \Rightarrow f(x) = f(a \cdot \hat{1}) = a f(\hat{1}) = a g(\hat{1}) = g(a \cdot \hat{1}) = g(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f = g \Rightarrow \varphi$ injectivă. Fie $y = \bar{a} \in B \Rightarrow m\bar{a} = \bar{0}$. Dacă $x = \hat{n} \in \mathbf{Z}_m$, atunci definim $f: \mathbf{Z}_m \rightarrow \mathbf{Z}_n, f(x) = n\bar{a}$. f este un omomorfism de grupuri și $\varphi(f) = f(\hat{1}) = \bar{a} \Rightarrow \varphi$ este surjectivă; c) $\text{card } A = \text{card } B$. **57.** Ordinul

lui A_n este $\frac{n!}{2}$. **58.** Fie $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și $x \in H \Rightarrow H = (xx_1, xx_2, \dots,$

$xx_n) \Rightarrow x = xx_k \Rightarrow x_k = e$ (elementul neutru) $\Rightarrow e \in H \Rightarrow$ există un x_i cu

$xx_i = e \Rightarrow x^{-1} = x_i \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow H$ subgrup. **59.** Se verifică prin calcul.

60. Dacă $H \not\subset K$ și $K \not\subset H \Rightarrow (\exists) x \in H, x \notin K$ și $(\exists) y \in K, y \notin H$, dar cum $x, y \in H \cup K \Rightarrow xy \in H \cup K \Rightarrow xy \in H$ sau $xy \in K$. În primul caz obținem că $y = x^{-1}(xy) \in H$, contradicție. În al doilea caz $x = (xy)y^{-1} \in K$, contradicție. **61.** Se verifică prin calcul. **62.** Dacă $xy = z \in Z(G) \Rightarrow y = x^{-1}z \Rightarrow$

$\Rightarrow yx = (x^{-1}z)x \Rightarrow yx = (x^{-1}z)x = x^{-1}(zx) = x^{-1}(xz) = (x^{-1}x)z = z \Rightarrow yx = xy$.

63. A se vedea problema 28 cap. III. **64.** Fie $\sigma \in \mathbf{Z}(A_n)$ și presupunem

că $\sigma \neq e \Rightarrow$ există $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\sigma(a) = b$ cu $b \neq a$. Cum $n \geq 4$, există c, d astfel încât a, b, c, d sunt distincte. Definim permutarea θ astfel: $\theta(a) = a, \theta(b) = c, \theta(c) = d, \theta(d) = b$ și $\theta(x) = x, (\forall)x \notin \{a, b, c, d\}$. Este clar că $\theta \circ \theta \in A_n$ și deci $\sigma \circ (\theta \circ \theta) = (\theta \circ \theta) \circ \sigma \Rightarrow \sigma(\theta(\theta(a))) =$

$= \theta(\theta(\sigma(a))) \Rightarrow d = b$, contradicție. Deci $Z(A_n) = \{e\}$. **65.** b) Fie $H \subset (\mathbf{Z}, +)$

un subgrup. Dacă $H = \{0\} \Rightarrow H = 0 \cdot \mathbf{Z}$. Dacă $H \neq \{0\} \Rightarrow (\exists)a \in H, a \neq$

$\neq 0$. Dacă $a < 0 \Rightarrow -a \in H$ și $-a > 0$. Deci putem presupune că H conține

un număr strict pozitiv. Fie n_0 cel mai mic număr strict pozitiv care

apartține lui H . Avem clar că $n_0 \cdot \mathbf{Z} \subset H$. Fie $x \in H \Rightarrow (\exists)q, r \in \mathbf{Z}$ cu $x =$

$= n_0q + r$, unde $0 \leq r < n_0$. Avem $r = x - n_0q \in H$. Dacă $r \neq 0$,

contrazicem alegerea lui n_0 . Deci $r = 0 \Rightarrow x = n_0q \Rightarrow H \subset n_0\mathbf{Z} \Rightarrow H =$

$= n_0\mathbf{Z}$. **66.** Se arată prin calcul direct, ținându-se cont de definiția

c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere. **67.** I) Fie $x \in aH \cap bH \Rightarrow x =$

$= ah, h \in H$ și $x = bh'$ cu $h' \in H \Rightarrow ah = bh' \Rightarrow b^{-1}a = h'h^{-1} = h_1 \in H$. Fie

$z \in aH \Rightarrow z = ak, k \in H$. Cum $b^{-1}a = h_1 \Rightarrow a = bh_1 \Rightarrow z = ak = b(h_1k) \Rightarrow z \in$

$\in bH \Rightarrow aH \subset bH$. Analog se arată că $bH \subset aH$; II) Se arată că funcția

$\varphi: H \rightarrow aH, \varphi(h) = ah$, este o bijecție. **68.** Din mulțimea de submulțimi

de forma $\{aH\}_{a \in G}$ alegem pe cele distincte. Fie acestea a_1H, a_2H, \dots, a_rH . avem clar că $G = \bigcup_{i=1}^r a_iH$ și $a_iH \cap a_jH = \emptyset$ pentru $i \neq j$. Deci $\text{ord } G =$

$$= \text{card } G = \sum_{i=1}^r \text{card } a_iH = r \cdot \text{card } H = r \cdot \text{ord } H \Rightarrow \text{ord } H \mid \text{ord } G. \quad 69. \text{ I)}$$

Fie mulțimea $\{e, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$. Cum G este finit, există k, j cu $k < j$ astfel încât $a^k = a^j$. Rezultă că $a^{j-k} = e$; II) Fie $\text{ord}(a) = n$; scriem $m = nq + r$ cu $0 \leq r < n$. Deci $e = a^m = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = a^r \Rightarrow a^r = e$, ceea ce contrazice alegerea lui n ; III) Se arată prin calcul direct; IV) Se aplică

teorema lui Lagrange. 70. $\text{ord } 25 = 24$; $\text{ord } 30 = 4$, $\text{ord } 45 = 24$, $\text{ord } 45 =$

$$= 8, \text{ord } 80 = 3. \quad 71. \text{ a) } (xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow xy = y^{-1}x^{-1}. \text{ Cum } x^2 = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x^{-1} \text{ și deci } xy = yx; \text{ b) Există grupuri necomutative cu proprietatea}$$

din enunț (a se vedea problema 38, cap. XX). 72. Notăm $A = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ și $B = \{x \in G \mid x^2 \neq e\}$. Avem $G = A \cup B$ și $A \cap B = \emptyset$. Dacă $B =$

$$= \emptyset \Rightarrow G = A \Rightarrow A \text{ conține cel puțin 2 elemente} \Rightarrow \text{există } x \neq x^{-1}. \text{ Deci } B$$

conține cel puțin 2 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}\} \Rightarrow \text{există } y \in B \text{ cu } y \notin$

$$\{x, x^{-1}\}. \text{ Se arată ușor că } y^{-1} \notin \{x, x^{-1}\} \text{ și } y \neq y^{-1}. \text{ Deci } B \text{ conține 4}$$

elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ se continuă procedeul. După un număr finit de pași obținem că B conține un număr par de elemente. Deci A are

un număr par de elemente și deci există $x \in G$ cu $x \neq e$ și $x^2 = e$. 73. Da-

$$\text{că } x \in G \text{ și } x^2 \neq e \Rightarrow (x^{-1})^2 \neq e \text{ și deci în produsul } \prod_{x \in G} x \text{ se simplifică 2}$$

$$\text{câte 2, elementele } x \in G \text{ pentru care } x^2 \neq e. \text{ Deci } \prod_{x \in G} x = \prod_{\substack{y \in G \\ y^2 = e}} y. \quad 74. \text{ Con-}$$

siderăm grupul $G = \mathbb{Z}_n - \{0\}$ cu operația de înmulțire. În acest grup

singurul element de ordinul 2 este -1 . Deci $\prod_{x \in G} x = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p-1 = -1 \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \quad 75. \text{ Se consideră}$$

grupul $G = \mathbb{Z}_p - \{0\}$ cu operația de înmulțire. 76. Clar $(ab)^{mn} = e$. Presu-

punem $(\exists) k, 0 < k < mn$, cu $(ab)^k = e \Rightarrow a^k b^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow (a^k)^n =$

$$= (b^{-n})^k = (b^n)^{-k} = e \Rightarrow a^{kn} = e \Rightarrow m \mid kn \Rightarrow m \mid k \text{ (deoarece } (m, n) = 1).$$

Analog se arată că $n \mid k$. Deci $mn \mid k \Rightarrow mn \leq k$, contradicție. 77. Prin

calcul se arată că $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ este un grup comutativ. Fie $\phi : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$,

$\varphi(\dot{x}) = \left(\bar{x}, \hat{x} \right)$ (am notat cu x , clasa lui x în \mathbf{Z}_{mn} . Se arată că φ este un

omomorfism de grupuri. Dacă $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y}) \Rightarrow \left(\bar{x}, \hat{x} \right) = \left(\bar{y}, \hat{y} \right) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

și $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow m \mid x - y$ și $n \mid x - y$. Deci $mn \mid x - y$ adică $\dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \varphi$ este injectivă. Cum \mathbf{Z}_{mn} și $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, au același număr de elemente, φ este și surjectiv. Deci φ este un izomorfism. **78.** Fie $a \in G$, $a \neq e$. Din teorema lui Lagrange obținem că $\text{ord}(a) \mid \text{ord } G \Rightarrow \text{ord}(a) \mid p \Rightarrow p = \text{ord}(a) \Rightarrow G = \{e, a, a^2, \dots, a^{p-1}\}$. Definim $\varphi : \mathbf{Z}_p \rightarrow G$, $\varphi\left(\hat{k}\right) = a^k$ unde $0 \leq k \leq p - 1$.

Se arată că φ este un izomorfism. **79.** Dacă $n = \text{ord}(xy) \Rightarrow (xy)^n = e \Rightarrow e = \underbrace{xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy}_{n \text{ ori}} \Rightarrow e = x(yx)^{n-1}y \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} \Rightarrow (yx)^n =$

$= e \Rightarrow \text{ord}(yx) \leq n$. Invers, se arată că dacă $m = \text{ord}(xy)$, atunci $\text{ord}(xy) \leq m$. Deci $\text{ord}(xy) = \text{ord}(yx)$. **80.** I) Se verifică prin calcul. II) Fie $a \in G$. Dacă $\text{ord}(a) = 4 \Rightarrow \langle a \rangle = G \Rightarrow G = \{e, a, a^2, a^3\}$. Se vede ușor că G este izomorf în acest caz cu $(\mathbf{Z}_4, +)$. Presupunem că $(\forall)a \in G$, $\text{ord}(a) < 4$. Cum $\text{ord}(a) \mid 4$, atunci $\text{ord}(a) \leq 2$. Dacă $G = \{e, a, b, c\}$ deci $a^2 = b^2 = c^2 = e$. De aici rezultă ușor că $ab = ba = c$, $ac = ca = b$, $bc = cb = a$ și deci în acest caz G este izomorf cu grupul lui Klein.

Capitolul XX

INELE ȘI CORPURI

1. Se verifică cu ușurință axiomele inelului. Elementul unitate este $(1, 0)$. **2.** Fie $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$, descompunerea în factori primi a lui n , astfel încât $k_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq r$) și $(p_i, p_j) = 1$, pentru $i \neq j$. Avem că

$\hat{x} \in N \Leftrightarrow p_i \mid x$, oricare ar fi i , $1 \leq i \leq r$. Fie acum, $\hat{x}^k = 0$ și $\hat{x}^m = \hat{x}$.

Atunci $\hat{x}^{m^i} = \hat{x}$, pentru oricare $i \geq 1$. Dacă luăm $m^l \geq k$, atunci $\hat{x}^{m^l} = 0$

și deci $\hat{x} = 0$. **3.** M este elementul unitate. Dacă M este formată dintr-un element, $(P(M), +, \cdot)$ este un corp cu două elemente. Dacă $M = \{a, b\}$ are două elemente, atunci inelul $P(M)$ este $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$, unde $0 =$

$= \emptyset$ și $1 = M$. Operațiile sunt definite prin tabele:

+	0	{a}	{b}	1
0	0	{a}	{b}	1
{a}	{a}	0	1	{b}
{b}	{b}	1	0	{a}
1	1	{b}	{a}	0

.	0	{a}	{b}	1
0	0	0	0	0
{a}	0	{a}	0	{a}
{b}	0	0	{b}	{b}
1	0	{a}	{b}	1

Dacă M are 3 elemente, inelul $P(M)$ are 8 elemente. Tabelele adunării și înmulțirii se fac analog celor precedente. 4. Dacă $b \in M$, atunci $f(b)a = (ab + b_0 - 1)a = (ab)a + b_0a - a = 1$: deci $f(b) \in M$. Dacă $f(b) = f(b')$, atunci $ab + b_0 - 1 = ab' + b_0 - 1$, de unde $ab = ab'$. Înmulțind această

inegalitate la stânga, cu a' obținem $b = b'$ și deci f este injectivă. Funcția f nu este surjectivă, căci de exemplu $b_0 \notin f(M)$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $b_0 = f(b)$, $b \in M$; atunci $ab + b_0 - 1 = b_0$, adică $ab = 1$, contradicție. 5. Fie un element $a \in A$, $a \neq 0$ și $b \in A$ cu $ba = 1$. Avem că $b \neq 0$ și fie $b' \in A$ cu $b'b = 1$. Atunci $(b'b)a = a$, adică $b' = a$. Deci $ab = ba = 1$, adică a este inversabil. 6. Fie $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$. La fel $g(1) = g(n) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$. Cum $f(1) = g(1)$ și

$f(n) = g(n)$ obținem $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$. De aici rezultă că $f\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n}\right)$,

$(\forall) \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$. 7. Dacă $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ este inversabil, există $\hat{b} \in \mathbf{Z}$ cu $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$.

Deci $ab \equiv 1 \pmod{n}$, adică există $k \in \mathbf{Z}$ cu $ab - 1 = kn$, sau $ab + (-k)n = 1$. Această relație spune că $(a, n) = 1$. Reciproc, este clar deoarece toate implicațiile de mai sus sunt echivalente. 8. Elementul neutru al legii \perp este 0. Dacă $y \in A$ este inversul lui $1 - x$ în inelul A , atunci $1 - y$ este simetricul lui x față de legea \perp . 9. Dacă se consideră $A = M_2(\mathbf{C})$ și

matricele $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $(x * y) * z \neq x *$

$(y * z)$. Deci, în general, legea $*$ nu este asociativă. 12. a) Se verifică ușor axiomele inelului; b) Se verifică ușor axiomele inelului; c) Aplica-

țiile $\varphi : \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow I$ definită prin $\varphi(m + n\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$ este un izo-

morfism de inele; d) Fie $d \neq d'$ și să presupunem că ar exista un izomor-

ism de inele $f: \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$. Se arată mai întâi că din $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$, rezultă $f(a) = a$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Apoi, dacă $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, atunci $f(x) = a + bf(\sqrt{d})$. Fie $f(\sqrt{d}) = m + n\sqrt{d'}$ și deci $d = f(d) = f(\sqrt{d} \cdot \sqrt{d}) = (m + n\sqrt{d'})^2 = m^2 + d'n^2 + 2mn\sqrt{d'}$. De aici, se obține $d = m^2 + d'n^2$ și $2mn = 0$, relații care conduc la o contradicție.

13. Fie x, y elemente oarecare dintr-un inel boolean. Considerând $(x + y)(x + y) = x + y$ și $(x - y)(x - y) = x - y$, rezultă $y = -y$ și $xy = yx$. Pentru

x_1, x_2, \dots, x_n elementul $u = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k + \dots + x_1 x_2 \dots x_n$, are proprietatea, că $x_i = ux_i$, $1 \leq i \leq n$. **14.** Se verifică cu ușurință axiomele inelului. Elementul neutru la adunare este $0 = (0, 0)$, iar elementul unitate este $1 = (1, 1)$. Are divizorii lui zero, de exemplu $(1, 0)(0, 1) = (0, 0) = 0$. Avem că $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ sunt inversabile.

15. a) Dacă $\bar{x} = \bar{y}$, atunci $mn \mid (x - y)$ și cum $(m, n) = 1$, rezultă $m \mid (x - y)$ și $n \mid (x - y)$, deci $\hat{x} = \hat{y}$ și $\bar{x} = \bar{y}$; **b)** Conform pct. a), φ este bine definită. Din definiție rezultă că φ este omomorfism de inele. Să arătăm

că φ este injectiv. Dacă $\varphi(\bar{x}_1) = \varphi(\bar{x}_2)$, atunci $(\hat{x}_1, \bar{x}_1) = (\hat{x}_2, \bar{x}_2)$, de

unde $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ și $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, sau $m \mid (x_1 - x_2)$ și $n \mid (x_1 - x_2)$. Cum $(m, n) = 1$, avem că $mn \mid (x_1 - x_2)$ și deci $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Mai mult, cum \mathbf{Z}_{mn} și $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ au același număr de elemente, rezultă că φ este și surjectivă. **16.** Fie $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri și deci conform problemei 47, cap. XIX, $f = \varphi_n$, $n \in \mathbf{Z}$. Mai mult, $n = \varphi_n(1) = \varphi_n(1 \cdot 1) = \varphi_n(1) \varphi_n(1) = n^2$, de unde deducem $n = 0$ și

$n = 1$. Astfel sunt doar-două omomorfisme de inele de la \mathbf{Z} la \mathbf{Z} și anume φ_0 și φ_1 , adică cel nul și cel identic. **17.** Fie $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri și deci conform problemei 52, cap. XIX, există $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ astfel încât $f(m) =$

$= m \hat{a}$ pentru $\forall m \in \mathbf{Z}$. Mai mult $\hat{a} = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = \hat{a}^2$.

Reciproc, dacă luăm un element $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ cu $\hat{a}^2 = \hat{a}$, atunci aplicația

$\varphi_{\hat{a}} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\hat{a}}(y) = \hat{x}a$ este un omomorfism de inele. 18. Fie $f : \mathbf{Z}_m \rightarrow \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. După problema 56. cap. XIX, dacă $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$, $\bar{a} = f(\hat{1})$, atunci $m\bar{a} = \bar{0}$. Mai mult $\bar{a}^2 = \bar{a}$. Reciproc, dacă $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$, cu $m\bar{a} = \bar{0}$ și $\bar{a}^2 = \bar{a}$, atunci aplicația $\varphi_{\bar{a}} : \mathbf{Z}_m \rightarrow \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\bar{a}}(x) = x\bar{a}$ este un omomorfism de inele. 19. I) Dacă $(a, n) = 1$, există $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încât $au + vn = 1$. Soluția ecuației este $x = \hat{ub}$; II) Se poate demonstra prin reducere la absurd; III) Dacă $d = (a, n)$ și $d \mid b$, fie $n = n_1d$ și $b = b_1d$. Fie, de asemenea, $u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încât $au + nv = d$. Atunci $x_0 = \hat{ub}_1$, este o soluție a ecuației. Atunci $x_k = x_0 + \hat{kn}_1$, $k = 0, 1, 2, \dots, d-1$, sunt d soluții distincte ale ecuației. 20. Observăm că $ux - uy = u(x - y)$ și $(ux)(uy) = u^2xy = uxy$ pentru orice $x, y \in A$, deci A_1 este subinel al lui A . Pentru partea a doua fie $A_2 = (1 - u)A = \{(1 - u)x \mid x \in A\}$. Deoarece $1 - u \notin \{0, 1\}$ și $(1 - u)(1 - u) = 1 - 2u + u^2 = 1 - u$ rezultă conform celor mai de sus că A_2 este un subinel al lui A ; c) și d) imediat acum din faptul că $u(1 - u) = u - u^2 = 0$. Din d) rezultă că scrierea lui $x \in A$ sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ este unică, deci $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ este bine definită. Faptul că $f : A \rightarrow A_1 \times A_2$, $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ (operațiile în A se efectuează pe „componente”) este un izomorfism rezultă imediat din c), d) și din unicitatea scrierii $x = x_1 + x_2$ (omomorfismul invers este $g : A_1 \times A_2 \rightarrow A$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$). 21. a) Se verifică cu ușurință axiomele inelului; b) $f : A \rightarrow A_1$, $f(a) = (0, a)$ este izomorfismul căutat (se vede ușor că $A' = \{(0, a) \mid a \in A\}$ este un subinel al lui A_1). Operația $x \circ y = x + y - xy$ este asociativă și 0 este element neutru, deci (A, \circ) este un monoid. Acum $x \in A$ este simetrizabil în $(A, \circ) \Leftrightarrow$ există $y \in A$ astfel încât $x \circ y = y \circ x = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ astfel încât $x + y - xy = y + x - yx = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.î. $(1 - x)(1 - y) = (1 - y)(1 - x) = 1 \Leftrightarrow (0, 1 - x) \in A_1$ este simetrizabil în A_1 . 22. a) Observăm că sistemul nu poate fi rezolvat prin metoda substituției, deoarece nici unul din coeficienții săi nu este inversabil în \mathbf{Z}_{12} . Scăzând prima ecuație

$$\text{din a doua obținem: } \begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ x + y = \hat{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{0} \\ x + y = \hat{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \hat{11} \\ y = \hat{2} \end{cases}. \text{ b) Deoa-}$$

rece $\hat{7}$ este inversabil în \mathbf{Z}_{12} , putem aplica și metoda substituției, scoțând pe

x din prima ecuație. Sistemul este incompatibil. 23. a) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$. 24. Dacă $a, b \in A$, avem că $a^2 - a, b^2 - b, (a + b)^2 - (a +$

$+ b) \in \mathbf{Z}(A)$ și rezultă $ab + ba \in \mathbf{Z}(A)$. Apoi, $a^2 \in \mathbf{Z}(A)$ și deci $a = a^2 -$

$-(a^2 - a) \in \mathbf{Z}(A)$, pentru orice a . 25. Există două astfel de structuri neizomorfe. Avem inelul nul în care produsul oricăror două elemente este nul și inelul \mathbf{Z}_p . 26. a) Fie $z = m + ni$. Avem $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow m^2 + n^2 =$

$= 0 \Leftrightarrow m = n = 0 \Leftrightarrow z = 0$; b) Fie $z = m + ni, z' = m' + n'i$. Avem $\varphi(zz') =$

$= \varphi((m + ni)(m' + n'i)) = \varphi((mm' - nn') + (mn' + m'n)i) = (mm' - nn')^2 +$

$+ (mn' + m'n)^2 = (m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = \varphi(z)\varphi(z')$; c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[i], z = m + ni,$

$z' = m' + n'i \neq 0$. Atunci $\frac{z}{z'} = \frac{m + ni}{m' + n'i} = \frac{mm' + nn'}{m'^2 + n'^2} + \frac{-mn' + m'n}{m'^2 + n'^2}i = \alpha + \beta i,$

unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încât $|\alpha - u| \leq \frac{1}{2}$ și $|\beta - v| \leq \frac{1}{2}$

și punem $q = u + vi$. Se verifică că $r = z - qz'$, are proprietatea că $\varphi(r) <$

$< \varphi(z')$; d) Avem $z \in \{-1, 1, -i, i\} \Rightarrow z$ este inversabil \Rightarrow există $z' \in \mathbf{Z}[i]$

cu $zz' = 1 \Rightarrow \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z') = 1 \Rightarrow \varphi(z) = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 0$ și

$n^2 = 1$ sau $m^2 = 1$ și $n^2 = 0 \Rightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}$. 27. c) Fie $z, z' \in$

$\in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}], z = m + ni\sqrt{2}, z' = m' + n'i\sqrt{2} \neq 0$. Atunci

$\frac{z}{z'} = \frac{m + ni\sqrt{2}}{m' + n'i\sqrt{2}} = \frac{mm' + 2nn'}{m'^2 + 2n'^2} + \frac{-mn' + m'n}{m'^2 + 2n'^2}i\sqrt{2} = \alpha + \beta i\sqrt{2},$ unde $\alpha, \beta \in$

$\in \mathbf{Q}$. Alegem $q = u + vi\sqrt{2}$, astfel încât $|u - \alpha| \leq \frac{1}{2}$ și $|v - \beta| \leq \frac{1}{2} <$

$< \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luând $r = z - qz'$, obținem că $\varphi(r) < \varphi(z')$. 28. a), b), c). Analog

cu problemele precedente; d) Fie $z = m + n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ un element

inversabil. Există deci $z' = x + y\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ a.î. $zz' = 1$, ceea ce conduce la sistemul $mx + 2ny = 1$, $nx + my = 0$. Condiția necesară și suficientă ca pentru $m, n \in \mathbf{Z}$, dați, sistemul precedent să aibă o soluție unică cu $x, y \in \mathbf{Z}$ este $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ (condiția este evident suficientă) necesitatea rezultă deoarece conform primei ecuații $(m, n) = 1$ și se ține seama de forma termenului liber. Deci $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ inversabil. Definim acum recurent următorul șir de numere întregi: $x_0 = y_0 = 1$; $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$. Numerele de forma $x_n + y_n\sqrt{2}$ sunt toate distincte, deoarece deducem de mai sus că $x_n + y_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ și evident $1 + \sqrt{2} \neq \pm 1$. Conform punctului b) al problemei (sau prin inducție după n) rezultă că $\varphi(z_n) = \varphi(x_n + y_n\sqrt{2}) = 1$, deci numerele distincte $x_n + y_n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sunt inversabile. **29.** Rezultă din problema 7 din acest capitol. **30.** Fie A un inel integru finit și $a \in A$, $a \neq 0$. Definim $\varphi_a : A \rightarrow A$ prin $\varphi_a(x) = ax$. Deoarece A este integru rezultă că φ_a este injectivă și cum A este finit este și surjectivă. Există deci $a' \in A$ cu $aa' = 1$. Aplicăm acum problema 5. Mai trebuie verificat că orice element nenul din K are inversul (în raport cu înmulțirea numerelor reale) tot în K . Fie deci $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \neq 0$, cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$. Dacă cel puțin unul din numerele a, b, c este nul (nu toate !) se verifică imediat că $\frac{1}{x} \in K$ prin amplificare cu conjugata numitorului. Dacă $abc \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{avem succesiv: } \frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} &= \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{b}{a}\sqrt[3]{2} + \frac{b^2}{a^2}\sqrt[3]{4} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} = \\ &= \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{b^3}{a^3} + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{bc}{a^2} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

Amplificând încă o dată cu conjugata numitorului obținem că $\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} \in K$. *Observație.* Exact ca și mai înainte se arată că

dacă $\alpha \in \mathbf{Q}$ nu este cubul unui număr rațional atunci $K_1 = \{a + b\sqrt[3]{\alpha} + c\sqrt[3]{\alpha^2} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ este un corp. **33.** Fie $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ un omomorfism de corpuri. În particular, f este un omomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ în el însuși. Conform problemei 53. cap XIX rezultă că există $q \in \mathbf{Q}$ astfel încât $f(x) = qx$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$. Mai mult, $f(xy) = f(x)f(y)$ oricare $x, y \in \mathbf{Q}$ și deci $qxy = q^2xy$, de unde $q = 0$ și $q = 1$. Rezultă că singurul automorfism al corpului \mathbf{Q} este cel identic. **34.** Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ un automorfism al corpului \mathbf{R} . Din problema precedentă rezultă că $f(r) = r$ pentru $r \in \mathbf{Q}$. Fie acum $x > 0$. Există deci $y > 0$ cu $y^2 = x$ și prin urmare $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 > 0$. Rezultă că pentru orice $x < y$ avem $-f(x) + f(y) = f(y - x) > 0$, adică f este strict crescătoare. Vom arăta că f este omomorfismul identic al lui \mathbf{R} . Presupunem prin absurd, că f nu este omomorfismul identic și fie $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ cu $f(x) \neq x$. Dacă $f(x) < x$ alegem $r \in \mathbf{Q}$ cu $f(x) < r < x$ și obținem $f(r) = r > f(x)$, contrar monotoniei lui f . Analog, se ajunge la o contradicție pentru $f(x) > x$. **35.** Fie $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ un morfism de corpuri cu $f(x) = x$ pentru $x \in \mathbf{R}$. dacă $f(i) = \alpha$, atunci $-1 = f(-1) = f(i^2) = (f(i))^2 = \alpha^2$, deci $\alpha \in \{i, -i\}$. Pentru $f(i) = i$ obținem $f(z) = f(x + iy) = x + f(i)y = x + iy = z$ iar pentru $f(i) = -i$ obținem $f(z) = \bar{z}$. Deci singurele morfisme de corpuri $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ care invariază \mathbf{R} sunt identitatea și conjugarea, care sunt evident chiar automorfisme.

36. c) Aplicația $f: \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \rightarrow K$, $f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & d \\ db & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism de corpuri. **37.** Fie K un corp comutativ. Să presupunem prin absurd că $f: (K, +) \rightarrow (K^*, \cdot)$ este un izomorfism de grupuri. Atunci $f(0) = 1$ și există $x \in K$, $x \neq 0$, cu $f(x) = -1$. Avem $f(-x) = f(0 - x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{-1} = -1$. Cum f este injectivă rezultă $x = -x$, adică $2x = 0$. Deci $(2 \cdot 1_K)x = 0$ (1_K fiind unitatea corpului K), de unde $2 \cdot 1_K = 0$. Este clar că $2y = 0$, oricare $y \in K$. Avem $1 = f(0) = f(2 \cdot 1) = (f(1))^2$. Dar $(f(1))^2 - 1 = (f(1) - 1)^2 = 0$. Deci $f(1) - 1 = 0$, adică $f(1) = 1$. Cum f este injectivă, rezultă $1 = 0$, contradicție. **38.** Elementul unitate este $(1, 0)$. Dacă $(a, b) \neq (0, 0)$, atunci $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \cdot K_1 = \{(x, 0) \mid x \in K\} \subset K \times K$ este un subcorp al lui $K \times K$ și aplicația $f: K \rightarrow K_1$ definită prin $f(x) = (x, 0)$ este un izomorfism de corpuri. Ecuația $x^2 + 1 = 0$ are în corpul $K \times K$

soluția $x = (0, 1)$. Fie $K = \mathbb{Z}_p$, p număr prim de forma $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$. Să presupunem că $x \in K$, are proprietatea $x^2 + 1 = 0$. Atunci după teorema lui Fermat (probl. 75. cap XIX.), rezultă $1 = x^{p-1} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$,

contradicție. **39.** Dacă $\alpha = \hat{1}$, rangul matricei este 2. Dacă $\alpha \neq \hat{1}$, rangul este 3. **40.** Matricea este inversabilă numai pentru $\alpha = 0$, inversa, în

acest caz, fiind $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **41.** G are 27 elemente. **42.** a) Sistemul este

nedeterminat: $x = 4 + 3\lambda$, $y = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}_5$; b) Sistemul are soluție unică: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **43.** Sistemul este compatibil nedeterminat,

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}_5$. Pentru $\alpha \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}\}$, un minor principal este dat de coeficienții necunoscutelor x_1, x_2, x_3 . Pentru $a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$, un minor principal este dat de coeficienții necunoscutelor x_1, x_2, x_4 . **46.** a) $X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ este ireductibil; b) $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ este ireductibil; c) $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1)$; d) $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.

47. Polinomul este ireductibil pentru $a = \hat{2}$. **48.** Conform teoremei lui Fermat, $x^6 = 1$ pentru $x \in \mathbb{Z}_7$. Dacă $a \neq \hat{0}$, atunci pentru $x = a^{-1}$, obținem: $(a^{-1})^6 + aa^{-1} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$. Deci pentru $a \neq \hat{0}$, polinomul este ireductibil. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{3})(X^3 + \hat{3})$.

49. Dacă A este un astfel de inel, iar e este elementul unitate al său, se arată că $\text{ord}(e) = n$ și deci orice element din A se scrie sub forma ke , $0 \leq k < n$, iar $ne = \hat{0}$. Asocierea $\hat{k} \rightarrow ke$ dă un izomorfism de inele $\mathbb{Z}_n \rightarrow A$. Cum pentru fiecare alegere a lui e de ordin n există un astfel de izomorfism, rezultă că sunt $\varphi(n)$ structuri de inel unitar pe $(\mathbb{Z}_n, +)$.

51. Dacă $x \in A$, $x^n = 0$, avem $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}) = 1 - x^n = 1$. De aici rezultă imediat cerințele problemei. **52.** Pentru o implicație se aplică problema precedentă. Reciproc, fie f inversabil și $g =$

$= \sum_{i=0}^m b_i X^i$ astfel încât $fg = 1$. Avem $a_0 b_0 = 1$, $a_n b_m = 0$, $a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m = 0$ etc.

Deci a_0 este inversabil și raționând inductiv, avem $a_n^{k+1} b_{m-k} = 0$ pentru orice $k = 0, 1, \dots, m$. Obținem $a_n^{m+1} b_0$ și deci a_n este nilpotent. Avem că

$f_1 = f - a_n X^n$ este de asemenea inversabil și, ca mai înainte, rezultă că a_{n-1}

este nilpotent ș.a.m.d. **53.** Dacă $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ este divizor al lui zero în

$A[X]$, fie $g = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ un polinom de grad minim încât $gf = 0$. Atunci

$a_n b_m = 0$ și deoarece $a_n g$ este un polinom de grad $< m$, astfel încât $(a_n g)f = 0$, rezultă că $a_n g = 0$. Succesiv se arată că $a_{n-k} g = 0$ pentru $k = 0, 1, \dots, n$ și deci $a_i b_j = 0$ pentru orice i, j . Cum $g \neq 0$, există $b_k \neq 0$ și avem $b_k f = 0$.

55. Se aplică problema precedentă, luând $p = 2$, demonstrându-se că polinomul $X^4 + X^3 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$. **56.** b) O matrice

pătratică cu coeficienți din K este inversabilă \Leftrightarrow orice combinație liniară cu coeficienți din K , care nu sunt toți nuli, a liniilor (respectiv coloanelor) sale este nenulă. Deci pentru a găsi numărul matricelor din $GL_n(K)$ procedăm astfel: Considerăm mai întâi o linie arbitrară, nenulă, cu n elemente din K . Sunt $q^n - 1$ posibilități de alegere a acesteia. Apoi, alegem o linie care să fie independentă de prima (să nu se obțină din prima prin înmulțire cu un element). Sunt $q^n - q$ posibilități de alegere a acesteia. Fie $q^n - q^2$ posibilități de alegere a acesteia ș.a.m.d. Se găsesc $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1})$ matrice cu proprietatea că nu există o combinație liniară cu coeficienți nu toți nuli a liniilor sale. Aceste matrice sunt toate elementele lui $GL_n(K)$.

Capitolul XXI

PROBLEME PENTRU CONCURSURI DE MATEMATICĂ

1. Dacă toate aplicațiile $f_n (n \geq 1)$ sunt surjective, afirmația este evidentă. Pentru cazul general, se notează pentru fiecare $k \geq 0$ mulțimile $B_{k,t} = (f_{k+1} \circ f_{k+2} \circ \dots \circ f_{k+t})(A_{k+t})$ oricare $t \geq 1$. Avem șirul descendent $A_k \supseteq B_{k,1} \supseteq B_{k,2} \supseteq \dots \supseteq B_{k,t} \supseteq \dots$. Cum A_k este finită, există un t_0 astfel încât $B_{k,t_0} = B_{k,t_0+1} = \dots$. Notăm $B_k = B_{k,t_0}$. Avem $B_k \neq \emptyset$. În continuare se arată că restricția aplicațiilor f_k la B_k este o funcție surjectivă de la B_k la B_{k-1} . **2.** Fie $f(0) = \alpha$. Dacă $\alpha = 0$, din condiția problemei, rezultă pentru $y = 0$, $f(f(x)) = f(x)$, oricare $x \in [0, 1]$. Dacă presupunem că $\alpha \neq 0$,

se arată prin inducție matematică că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ ori}}(a) = (n+1)\alpha$. Pentru

n suficient de mare avem $(n+1)\alpha > 1$, ceea ce contrazice faptul că $f(x) \leq 1$, oricare $x \in [0, 1]$. Deci $\alpha = 0$, caz analizat mai înainte. Funcția $g : [0, 1] \rightarrow$

$[0, 1]$, definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \beta \\ 1, & \beta < x \leq 1 \end{cases}$, unde $\beta \in (0, 1)$ satisface

condiția problemei. 3. Se înlocuiește x cu $b - a - x$ și se obține egalitatea $\alpha f(b - x) + \beta f(a + x) = g(b - a - x)$. Împreună cu relația din enunț se obține un sistem liniar din care se deduce $f(a + x)$; din aceasta se obține

imediat $f(x)$. 4. Avem $a_n = \sqrt{a_0^2 + n}$. dacă $a_0 = 0$ se obține șirul $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}, \dots$ care conține subșirul infinit $\{\sqrt{p}\}$, unde p este

număr prim și în care toate elementele sunt numere iraționale. Dacă $a_0 \neq 0$, considerăm subșirul dat de $n = (p-1)a_0^2$, unde p este număr prim și în care toate elementele sale sunt numere iraționale. 5. Se arată mai întâi

că $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$, de unde rezultă imediat că $\left[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \right] = 4n+1$. 6. Mulțimea cerută este $\{0, 1\}$. 7. Pentru $k \in$

$(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. 8. Avem $(a+b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{3} + 2(ab - ac - bc) \geq 0 \Rightarrow 2(ac + bc - ab) \leq \frac{5}{3} \Rightarrow ac + bc -$

$-ab \leq \frac{5}{6} < 1$. 9. Să presupunem că $x \leq y \leq z$. Atunci $z - x \leq$

$\leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz} \Rightarrow 3(z-x)^2 \leq 2[(x-y)^2 + (z-x)^2 + (y-x)^2]$ sau $2[(x-y)^2 + (y-x)^2] \geq [(x-y) + (y-x)]^2$, inegalitate adevă-

rată în mod evident. 10. $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow 7 > \frac{m^2}{n^2}$ sau $7n^2 > m^2$. Avem că

7 nu divide $m^2 + 1$ și 7 nu divide $m^2 + 2$. Deci $7n^2 \geq m^2 + 3$, de unde $7 \geq \frac{m^2 + 3}{n^2} \geq \frac{1}{n^2} \left(m + \frac{1}{m} \right)^2$ sau $\sqrt{7} \geq \frac{m}{1} + \frac{n}{mn}$. Egalitatea are loc pentru $m =$

$= 1$, dar în acest caz se vede că $\sqrt{7} > 2 > \frac{2}{n}$. 11. Avem $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} <$

$$< \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < \frac{a_{k+1}}{k+1} \text{ sau}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} < a_{k+1}. \text{ Dacă considerăm funcția } S : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}, s(k) =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}, \text{ aceasta este crescătoare și deci pentru } k \leq n \text{ avem } S(k)$$

$$< S(n), \text{ adică inegalitatea din stânga. Pentru cealaltă inegalitate considerăm}$$

șirul $-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1$ și avem $\frac{(-a_n) + \dots + (-a_{k+1})}{n-k} < \frac{(-a_n) + \dots + (-a_1)}{n}$.

12. Inegalitatea se scrie $0 \leq (n-3)(x^4 + y^4 + z^4) + (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2$. Rezultă $n = 3$. **13.** Pentru $m < n$, scriem suma

$$S = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^i \max(i, k) + \sum_{k=i+1}^n \max(i, k) \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^i i + \sum_{k=i+1}^n k \right) = \sum_{i=1}^m (i^2 + (i+1) + (i+2) + \dots + n), \text{ care calculată ne dă } S = \frac{m}{12} (m^2 - 1 + 3n^2 + 3n).$$

Pentru $m = n$, scriem $S = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^m \max(i, k) + \sum_{k=1}^m \max(m, k)$. Dar, de mai

înainte, se obține. $\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^m \max(i, k) = \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$. Este clar că

$$\sum_{k=1}^m \max(m, k) = m^2; \text{ deci } S = m^2 + \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}. \text{ 14. Observăm că}$$

pentru $m^2 \leq k < (m+1)^2$, avem $[\sqrt{k}] = m$. Scriem $S = \sum_{k=1}^{2^2-1} [\sqrt{k}] +$

$$+ \sum_{k=2^2}^{3^2-1} [\sqrt{k}] + \dots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} [\sqrt{k}] + n \text{ și ținând seamă de observația de mai}$$

sus se obține, după calcule, $S = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$. **15.** Se

face schimbarea $y = x - 2$ și se obține inegalitatea $(m-1)y^2 + (3m-1)y + 2m-6 > 0$, care trebuie să fie adevărată pentru orice $y > 0$. **16.** Scriem

$$cx^2 - bx + a = c(x^2 - 1) + (a+b+c) \frac{1-x}{2} + (a-b-c) \frac{1+x}{2}. \text{ 17. } a =$$

$$= -2c, b = c^2, c > 0. \text{ 18. } a \neq 0, b = 0 \text{ și } a \neq 0, b = 1. \text{ 19. } (\sqrt{a}, \sqrt{a}, \dots,$$

\sqrt{a}); $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \dots, -\sqrt{a})$. **20.** Se logaritmează ambii membri și grupând termenii se obține $(a_2 - a_n)(\lg a_2 - \lg a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)(\lg a_{n-1} - \lg a_n) \geq 0$. Dar $a_{k+1} - a_k$ și $\lg a_{k+1} - \lg a_k$ au același semn și deci totul rezultă. **21.** Dacă $x \geq 1$, atunci $x = 2^k \cdot 2^\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$. De aici $\log_2 x = k + \alpha$ și deci $[\log_2 x] = k$. Din $[x] \leq x$ rezultă $k \leq \log_2 [x] \leq k + \alpha$ și $[\log_2 x] = k$. Deci $0 \leq \log_2 x - \log_2 [x] \leq \alpha$, de unde $[\log_2 x - \log_2 [x]] = 0$.

Celălalt membru este de asemenea zero. **22.** Fie $s = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots +$

$$+ \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}. \text{ Avem } 2s = \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_3 a_4} + \dots + \frac{2}{a_{2n-2} a_{2n-1}} + \frac{2}{a_{2n-1} a_{2n}} < \\ < \frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} = \\ = \frac{1}{d} \left(\frac{a_1 - a_0}{a_0 a_1} + \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} a_{2n-2}} + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{a_{2n-1} a_{2n}} \right) = \\ = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}} \right) = \frac{2n}{a_0 a_{2n}}.$$

Deci $s < \frac{n}{a_0 a_{2n}}$. Analog, se demonstrează cealaltă inegalitate. **23.** Pentru

$$m = 1, n = 2 \Rightarrow f(2) = f(1)f(2) \Rightarrow f(1) = 1; f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 2 \cdot 2 = 4. \quad 2 < 3 < 4 \Rightarrow f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 2 < f(3) < 4 \Rightarrow f(3) = 3.$$

Presupunem că pentru $k < n$ avem $f(k) = k$. Fie $n = 2p \Rightarrow f(n) = f(2 \cdot p) = 2f(p) = 2 \cdot p \Rightarrow f(n) = n$. Dacă $n = 2p - 1 \Rightarrow f(n + 1) = f(2p) = 2p$. $n - 1 < n < n + 1 \Rightarrow f(n - 1) < f(n) < f(n + 1) \Rightarrow n - 1 < f(n) < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$.

Deci $f = 1_N$. **25.** Se poate demonstra prin inducție matematică. Fie n

numărul maxim de cititori aflați la un moment dat în sala de lectură. Dacă $n = 1$, atunci toți cititorii au intrat în mod succesiv. Pentru a trece de la pasul n la pasul $n + 1$, observăm că problema rămâne evident aceeași dacă îi adăugăm presupunerea suplimentară că de fiecare dată al $(n + 1)$ -lea cititor intrat în sală iese primul dintre cei $n + 1$. Fiecare astfel de cititor va scrie de fiecare dată numerele (n, n) , problema revenind la pasul precedent. **26.** Fie $E = C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$. Se arată prin calcul că

$E + 2^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}} \left(\frac{1}{1(2^{n-1}-1)} + \frac{1}{2(2^{n-1}-2)} + \dots + \frac{1}{(2^{n-2}-1)(2^{n-2}+1)} \right)$ se divi-

de cu 2^{2^n} . Dar se arată că $C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}} \left(\frac{1}{1(2^{n-1}-1)} + \dots + \frac{1}{(2^{n-2}-1)(2^{n-2}+1)} \right)$ este

multiplu de 2. (Se ține cont că $2 \mid C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$). 27. $5^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{30}} < 6^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{2\sqrt{30}} < 6^{10}$. Dar $5^{2\sqrt{30}} < 5^{11}$. Se arată că $5^{11} < 6^{10}$. Într-adevăr, $6^{10} =$

$= (5+1)^{10} = 5^{10} + C_{10}^1 \cdot 5^9 + C_{10}^2 \cdot 5^8 + C_{10}^3 \cdot 5^7 + \dots + C_{10}^9 \cdot 5 + C_{10}^{10} > 5^{10} +$

$+ 10 \cdot 5^9 + 5 \cdot 9 \cdot 5^8 + 120 \cdot 5^7 > 5^{11}$. 28. Fie $\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101}$. Avem

$\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101} - (\sqrt{26} - 5)^{101} + (\sqrt{26} - 5)^{101} = a + (\sqrt{26} - 5)^{101} = a +$

$+ \frac{1}{(\sqrt{26} - 5)^{101}} < a + \frac{1}{(2 \cdot 5)^{101}} = a + \frac{1}{10^{101}} = a, \underbrace{0 \ 0 \ 0 \dots 0}_{100 \text{ ori}} 1 \ (a \in \mathbf{Z}).$

29. Dacă notăm $S_m = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m$, observăm că $S_0 + S_{n-1} = S_1 +$

$+ S_{n-2} = \dots = S_{n-1} + S_0 = 2^n$. 30. Se poate demonstra folosind varianta a

doua a metodei inducției matematice, după numărul b al băieților. 31. Numerele de forma $n_k = 3^k, k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. 32. $p = 3$.

33. Presupunem prin absurd, că există $n \mid 2^n - 1$. Fie p cel mai mic număr

prim care divide pe n , iar k cel mai mic număr natural astfel încât $p \mid (2^k - 1)$.

Avem $p \mid (2^k - 1)$ și $p \mid (2^{p-1} - 1)$ (conform micii teoreme a lui Fermat).

Deci $k \mid (p-1)$. Dar $n \mid (2^n - 1)$ și $p \mid n$ implică $k \mid n$. Așadar k este un

divizor al lui n mai mic decât p , contradicție. 34. Numerele de forma $n_k =$

$= (p-1)(pk+1), k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. 35. Avem $5 \mid (2^n - 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \mid (n-3)$ și $13 \mid (2^n - 3) \Leftrightarrow 12 \mid (n-4)$. Se arată că nu există nici un

număr natural n care să satisfacă în același timp condițiile $4 \mid (n-3)$ și

$12 \mid (n-4)$. 36. Observăm mai întâi că dacă 3 nu divide a , atunci $3 \mid (a +$

$+ 1)$ sau $3 \mid (a - 1)$, de unde $9 \mid (a^3 + 1)$ sau $9 \mid (a^3 - 1)$. Așadar, dacă 3 nu

divide nici unul dintre numerele a, b, c, d, e , atunci $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 =$

$= 9k \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9, contradicție. 37. a) Nu-

merele $n_k = 1 - a + k(a-b), k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. b) Se folosește

punctul a). 39. (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7); (8, 8, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 6); (8, 8, 7,

7, 6, 6, 6, 6, 6); (8, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6) și permutările acestora. 40. Se

arată că $2^{2^{n+1}} + 3$ este multiplu de 7. **43.** Soluțiile ecuației sunt: $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 2$, $y_2 = -5$. **44.** $p(q(x)) = x$. **45.** Se arată mai întâi că gradul n al acestor polinoame este ≤ 3 . Se găsesc 12 polinoame: $\pm(x^2 - 1)(x \pm 1)$, $\pm(x^2 + x - 1)$, $\pm(x^2 - 1)$, $\pm(x \pm 1)$. **47.** Fie $u_i = q_i m + r_i$, $0 \leq r < m$. Observăm că $X^m - 1 = (X - 1)P(X)$. Apoi, $X^{u_i} = X^{q_i m + r_i} = X^{r_i} (X^{q_i m} - 1) + X^{r_i}$.

Cum $X^m = (X - 1)P(X) + 1$, obținem $X^{q_i m} = A_i(X)P(X) + 1$, unde $A_i(X)$ este un polinom în X . Deci $Q(X) = G(X)P(X) + (X^{r_1} + X^{r_2} + \dots + X^{r_n})$.

Așadar $P(X) \mid Q(X) \Leftrightarrow P(X) \mid X^{r_1} + X^{r_2} + \dots + X^{r_n} (= H(X))$. Dar cum $H(X) = n_0 + n_1 X + \dots + n_{m-1} X^{m-1}$ are gradul mai mic sau egal decât grad $P(X)$, rezultă că $P(X) \mid H(X) \Leftrightarrow$ există $\alpha \in \mathbf{R}$, astfel încât $H(X) = \alpha P(X)$. De aici rezultă $n_0 = n_1 = \dots = n_{m-1}$. **48.** Se poate demonstra prin inducție după $n = \text{grad } P$.

$$\begin{aligned} \text{49. } \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(2) < \sigma(1)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)+1} (m(\sigma) + 1) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)+1} = - \sum_{\substack{\sigma \in R_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)}. \end{aligned}$$

Dacă $n \geq 4$, există pentru orice permutare pară (impară) cu condiția $\sigma(1) < \sigma(2)$ o permutare impară (pară) cu aceeași condiție $\sigma(1) < \sigma(2)$. Deci ultima sumă este zero. Deci

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = 0 \text{ pentru } n \geq 4. \text{ Se verifică ușor că pentru } n = 2 \text{ și } n =$$

$$= 3 \text{ suma este egală cu } -1. \text{ 51. } T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \text{ unde } k = \left[\frac{b}{a+b} (n+1) \right].$$

$$\text{52. Avem } \det A = \begin{vmatrix} 13 \cdot 102 + 1 & 13 \cdot 111 & 13 \cdot 223 \\ 13 \cdot 331 & 13 \cdot 321 + 1 & 13 \cdot 123 \\ 13 \cdot 132 & 13 \cdot 104 & 13 \cdot 131 + 1 \end{vmatrix}. \text{ Folosind propri-$$

$$\text{etățile determinantilor, acesta rezultă egal cu } 13k + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13k + 1,$$

unde $k \in \mathbf{Z}$. Deci $\det A \neq 0$. **53.** Inversa este $I_n - AB$. **54.** Cum $e \in H$

rezultă $a = ae \in bk$, $k \in K$ și deci $b^{-1}a \in K$. De aici rezultă $H \subset K$. **55.** Se poate observa că ecuația $x^3 - 1 = 0$ are trei soluții în \mathbf{C} și doar una în \mathbf{R} . **57.** Avem $H \cap \mathbf{Z} \neq \{0\}$, și deci $H \cap \mathbf{Z} = n\mathbf{Z}$, $n > 0$. De aici rezultă $n\mathbf{Q} \subset H$. Dar $n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ și deci $\mathbf{Q} = H$. **58.** Din $a^2 = b^2 \Rightarrow a = a^{-1}b^2$, $a = b^2a^{-1}$ și $ab^{-1} = a^{-1}b$. Din $a^2 = abab \Rightarrow a = bab$ și $ab^{-1} = ba$. Deci $a^{-1}b = ba$, de unde $(ab)^2 = abab = (a^{-1}b^2)b(b^2a^{-1})b = a^{-1}b^5(a^{-1}b) = a^{-1}b^5(ba) = a^{-1}(a^6)a$ (deoarece $a^2 = b^2$). Deci $a^2 = (ab)^2 = a^6 \Rightarrow a^4 = e$. De asemenea $\bar{b}^4 = e$. **59.** $b^{2n} = (b^n)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Analog, $b^{3n} = (b^n)^3 = ab^3a^{-1}$. Mai mult, $(b^n)^n = b^{n^2} = ab^n a^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} = b$ (deoarece $a^2 = e$). Deci $b^{n^2} = b$, de unde $b^{n^2-1} = e$. **60.** $b^{2k} = (b^k)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Mai mult, $b^{k^2} = (b^k)^k = ab^k a^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2}$. Apoi $(b^{k^2})^k = (a^2ba^{-2})^k = a^2b^k a^{-2} = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} \Rightarrow b^{k^3} = a^3ba^{-3}$. În general, $b^{k^m} = a^m b a^{-m} = b$ (deoarece $a^m = e$). Deci $b^{k^{m-1}} = e$. **64.** Se folosește egalitatea $(1 + 1)(a + b) = (1 + 1)a + (1 + 1)b$. **65.** Dacă $u \in A$ este inversul lui $1 - ab$, atunci inversul lui $1 - ba$ este $1 + bua$. **68.** Se folosește identitatea $(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$, precum și problema 65. **69.** Pentru a arăta că este corp se folosește problema 5, cap. XVII. Soluțiile ecuației sunt matricele A (a, b, c, d) astfel încât $a = 0$ și $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. **70.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $\text{Tr } A = a + d$; A verifică ecuația $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)I_2 = 0$. Dacă $\text{Tr } A = 0$, atunci $A^2 = (bc - ad)I_2$ și deci A^2 comuta cu orice matrice din $M_2(\mathbf{C})$. Se arată că $\text{Tr } [(A, B)] = \text{Tr } (AB - BA) = 0$, de unde rezultă afirmația i). Din afirmația i) rezultă afirmația ii). **71.** Din $x^6 = x$ și $(-x)^6 = -x$ rezultă $(-x) = x$, adică, $2x = 0$ oricare ar fi $x \in A$. Din $(x + 1)^6 = x + 1$, dezvoltând termenul stâng, se obține: $(x^6 - x) + 2(3x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 3x) + (x^4 + x^2) = 0$, de unde $x^4 + x^2 = 0$, adică $x^4 = -x^2 = x^2$. Înmulțind ambii membri ai egalității $x^4 = x^2$ cu x^2 se obține $x^2 = x$. **73.** i) Din $x^3 = x$, $x^4 = x^2$, se deduce $(x^2yx^2 - x^2y)^2 = (x^2yx^2 - yx^2)^2 = 0$, oricare $y \in A$; ii) Avem $(x^2yx^2 - x^2y)^3 = x^2yx^2 - x^2y = 0$. La fel, $x^2yx^2 - yx^2 = 0$, adică $x^2yx^2 = yx^2$; atunci $x^2y = yx^2$, oricare $x, y \in A$. Dar, $xy = x^3y^2$ și ținând cont de cele precedente rezultă că $xy = yx$.

BIBLIOGRAFIE

- 1) Alef₀, *Algebră (Numere reale, calcul numeric, numere complexe)*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.
- 2) Becheanu M., *Teste de algebră pentru liceu*, Editura Europentic, Cluj-Napoca, 1995.
- 3) Becheanu M., Căzănescu V., Năstăsescu C., Rudeanu S., *Logică matematică și teoria mulțimilor* (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică), Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1972.
- 4) Buzeteanu Ș., Niță C., *Determinantul produsului a două matrice. Regula lui Laplace I, II*; *Gazeta Matematică*, seria metodică, 1985, 1987.
- 5) Călugărița Gh., Mangu V., *Probleme de matematică pentru treapta I și a II-a de liceu*, Ed. Albatros, București, 1977.
- 6) Commissaire H., Anzemberger E., *Exercises d'Algebre et de Trigonometrie*, Paris, 1923.
- 7) Coșniță C., Turtoiu F., *Culegere de probleme de algebră*, Ed. Tehnică, București, 1972.
- 8) Chiriac V., Chiriac M., *Probleme de algebră*, Ed. Tehnică, București, 1977.
- 9) Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. H., *Posobie po matematike dlia postupaiușcih v vuzî*, Moskva, 1976.
- 10) Fadeev D. K., Sominski I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Ed. Tehnică, București, 1954.
- 11) Georgescu-Buzău E., Matei N., *Exerciții de teoria mulțimilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969.
- 12) Iaglom I. M., Iaglom A. N., *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. Tehnică, București, 1962.
- 13) Ioachimescu A. G., *Culegere de probleme de algebră*, ediția a V-a, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1968.
- 14) Ionescu-Țiu C., Pîrșan L., *Algebră și analiză matematică pentru admitere în facultate*, Ed. Albatros, București, 1974.
- 15) Ikramov H. D., *Zadacnik po lineinoi algebre*, Moskva, 1975.
- 16) Kuterov A., Rubanov A., *Zadacnik po algebre i elementarnîm funcțiam*, Moskva, 1974.

- 17) Năstăsescu C., *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.
- 18) Năstăsescu C., Niță C., Vraciu C., *Bazele algebrei*, vol. I, Ed. Academiei Române, București, 1986.
- 19) Năstăsescu C., Savu I. ș.a., *Computer Matematica*, nr. 1-6.
- 20) Nesterenko I. V., Olenik S. N., Potapov M. K., *Zadaci vstupidelnih eczamenov po matematike*, Moskva, 1986.
- 21) Niță C., Spircu T., *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Tehnică, București, 1974.
- 22) Novoselov S. I., *Curs special de algebră elementară*, Ed. Tehnică, București, 1955.
- 23) Perju C., Perju R., *Probleme de matematică pentru admitere în învățământul superior*, Ed. Militară, București, 1974.
- 24) Rusu E., *Aritmetică și teoria numerelor*, Ed. Tehnică, București, 1964.
- 25) Sklarski D. O., Cențov N. N., Iaglom I. M., *Izbrannîe zadacii teoremî elementarnoi matematiki (Arifmetica i algebra)*, Moskva, 1965.
- 26) Sominski I. S., Gokovina L. I., Iaglom I. M., *O matematicescoi inducții*, Moskva, 1967.
- 27) Stamate I., Crișan I., *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică pentru licee*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969.
- 28) Stamate I., Stoian I., *Culegere de exerciții și probleme de algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- 29) Vișenski V. A., Kartașov N. V., Mihailovski B. I., Iardenko M. I., *Sbornik zadaci kievskih matematiceskih olimpiad*, Kiev, 1984.
- 30) *Matematică - Algebră* (manuale de liceu clasele IX-XII, ediția 1980) Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- 31) Colecția „Gazeta Matematică - seria B”.
- 32) Colecția „Matematika v škole”.

Problemele și exercițiile propuse în această lucrare au fost grupate în capitole corespunzătoare celor din manualele de algebră pentru clasele IX - XII, acoperind întreaga programă de liceu și respectând gradarea din punct de vedere al dificultății.

Lucrarea se adresează elevilor de liceu, candidaților la examenele de bacalaureat și admitere în facultăți, celor care doresc să participe la concursurile școlare. De asemenea, poate fi utilizată și de către profesorii de matematică în activitatea lor.

În această ediție lucrarea a fost completată cu probleme și exerciții date la examene și concursuri în ultimii ani.



EDITURA ROTECH PRO

ISBN 973-97010-6-x